Funzioni convesse

Definizione Sia f una funzione definita nell'intervallo $[a,b]$. Si dice che f è convessa in $[a,b]$ se $\forall x,y \in [a,b]$ vale

(*) $$f(tx+(1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y) \quad , \forall t \in [0,1].$$

Definizione Una funzione f si dice concava se $-f$ è convessa.

Prop. 1 Siano f_k convesse in $[a,b]$ e $\alpha_k \in \mathbb{R}$, con $\alpha_k \geq 0 \ \forall k$. Allora $\sum \alpha_k f_k$ è convessa.

Prop. 2 Siano f_k convesse in $[a,b]$. Se $\{f_k\} \to f$, allora f è convessa in $[a,b]$.

Prop. 3 Siano f_k convesse in $[a,b]$. Allora $f(x) = \sup_k f_k(x)$ è convessa in $[a,b]$.

Prop. 4 La funzione f è convessa in $[a,b]$ se e solo se la funzione $g(x,y) = \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ definita in $\{(x,y) \in [a,b]\times[a,b] : x \neq y\}$ è non decrescente in ciascuna variabile.

Dimostrazione

Sia f convessa. Supponiamo $x<y$ e $t \in (0,1)$. Vogliamo dimostrare che $g(x,y) \geq g(x, tx+(1-t)y)$
Dividendo la (*) per $(1-t)(y-x) = (1-t)y + tx - x$ otteniamo

(1) $$g(x, tx+(1-t)y) = g(tx+(1-t)y, x) = \frac{f(tx+(1-t)y) - f(x)}{(1-t)(y-x)} \leq \frac{(1-t)[f(y)-f(x)]}{(1-t)(y-x)} = g(x,y).$$

Analogamente se $x>y$.

Viceversa, se g è non decrescente e $x<y$, allora dalla (1) segue (*). □

Prop. 5 Sia f convessa in $[a,b]$. Allora f è continua in (a,b) e dotata in ogni punto di (a,b) di derivata destra e derivata sinistra D_+f e D_-f.

Dimostrazione

Per la prop. 4 $g(x,x+h)$ è non decrescente in h e quindi esistono i limiti per $h \to 0^+$ e $h \to 0^-$.
Inoltre $\quad D_+f(x) \leq \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq D_-f(y)$ per $x<y$. Quindi D_+f e D_-f sono finiti in (a,b) e quindi f è continua in (a,b).

Prop. 6 Sia f convessa in $[a,b]$. Allora f è derivabile in $[a,b]$ ad eccezione di al più un'infinità numerabile di punti e la derivata è non decrescente in $[a,b]$.

Prop. 7 Sia f continua in (a,b). Se $\forall m \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) + mx$ non ha massimi locali in (a,b), allora f è convessa.

Dimostrazione Scelti $y, z \in (a,b)$ definiamo m tale che $f(z) + mz = f(y) + my$ e $g(x) = f(x) + mx$. Per ipotesi $g(x) \leq g(y) = g(z)$ $\forall x \in [y, z]$. Quindi $\forall t \in (0,1)$ si ha $g(ty + (1-t)z) \leq t g(y) + (1-t) g(z)$, da cui la tesi.

Prop. 8 Sia f continua in (a,b). Allora f è convessa se e solo se

$$\underset{h \to 0}{\lim{}'} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \geq 0 \qquad \forall x \in (a,b).$$

Dimostrazione Se f è convessa, allora il numeratore è non negativo.
Viceversa, posto $g(x) = f(x) + \varepsilon x^2 + mx$ $(\varepsilon > 0)$, risulta

$$\underset{h \to 0}{\lim{}'} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} \geq 2\varepsilon$$

. Se g avesse un massimo interno x_0, allora avremmo una contraddizione. Quindi $f(x) + \varepsilon x^2$ è convessa $\forall \varepsilon > 0$.

Esercizi

1. Se f è continua in (a,b) e $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ $\forall x,y \in (a,b)$ allora è convessa.

2. Se f è convessa in $(0,+\infty)$ allora esiste $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

3. Siano f_k convesse in (a,b) e $\{f_k\}$ convergente in (a,b). Dimostrare che $\{f_k\}$ converge uniformemente in ogni compatto contenuto in (a,b).

4. Una funzione f è convessa in I se e solo se $\det \begin{bmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{bmatrix} \geq 0$ $\forall x<y<z \in I$.

5. Una funzione f continua in (a,b) è convessa se e solo se $f(x) \leq \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt$.

Insiemi convessi piani

<u>Definizione</u> Un insieme K è <u>convesso</u> se ogni segmento con estremi in K è interamente contenuto in K.

① L'intersezione di convessi è convessa.

② Un insieme limitato con punti interni è convesso se e solo se ogni retta passante per un punto interno dell'insieme contiene due punti del bordo.

<u>Definizione</u> Sia K un insieme convesso. Una retta si dice <u>di supporto</u> a K se contiene almeno un punto del bordo di K e determina un semipiano chiuso che contiene K (detto di supporto).

<u>Definizione</u> Sia K convesso e limitato. Si dice <u>spessore</u> di K nella direzione v la distanza tra le due rette di supporto a K ortogonali a v.

③ Due rette di supporto parallele che determinano lo spessore massimo di K contengono ciascuna un punto di K ed il segmento che unisce tali punti è ortogonale alle rette di supporto.

④ Per ogni punto del bordo di un convesso K passa almeno una retta di supporto a K.

⑤ Un insieme limitato con interno non vuoto è convesso se e solo se per ogni punto del bordo passa almeno una retta di supporto all'insieme.

<u>Definizione</u> Un punto del bordo di un insieme convesso si dice <u>regolare</u> se esiste un'unica retta di supporto per esso. Si dice <u>singolare</u> (o vertice) se ne esistono almeno due (e quindi infinite).

<u>Definizione</u> La retta di supporto in un punto regolare si dice <u>tangente</u>. In un punto singolare si definiscono le <u>semirette tangenti</u> come le semirette che determinano l'angolo intersezione di tutti i semipiani di supporto per il punto.

⑥ Il bordo di un convesso (detto <u>curva convessa</u>) è dotato di retta tangente eccettuato al più un'infinità numerabile di punti.

Funzioni continue

① Date due figure convesse (piane), esiste una retta che dimezza contemporaneamente l'area delle due figure.

② Ad ogni figura convessa può essere circoscritto un quadrato.

③ Ogni figura di diametro 1 è contenuta in un esagono regolare di lato $1/\sqrt{3}$.

④ Ogni convesso piano K è contenuto in un insieme centralmente simmetrico e convesso di area minore o uguale al doppio dell'area di K.

⑤ Ogni convesso piano K contiene un insieme convesso centralmente simmetrico di area maggiore o uguale ai $\frac{2}{3}$ dell'area di K.

Somma di insiemi (e funzione supporto)

<u>Definizione</u> $K+L=\{x+y \mid x\in K,\ y\in L\}$ (somma alla Minkowski)

Per $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha K=\{\alpha x \mid x\in K\}$.

Si definisce <u>funzione supporto</u> di K nella direzione $v=(\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$

$h_K(v)=h_K(\vartheta)$ la distanza (con segno) dall'origine della retta di supporto a K con normale esterna v nei punti di contatto tra K e la retta di supporto.

In formule $\quad h_K(v)=\max\limits_{x\in K} x\cdot v$.

<u>Definizione</u> $K_\varepsilon = K+\varepsilon \underbrace{B}_{\text{cerchio unitario}} = \{x\in\mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(x,K)\le\varepsilon\}$

Distanza di Hausdorff $\quad d(K,L)=\max\left\{\sup\limits_{x\in K}\operatorname{dist}(x,L),\ \sup\limits_{y\in L}\operatorname{dist}(y,K)\right\}$

$$=\min\{\varepsilon\in\mathbb{R} \mid K\subset L_\varepsilon \text{ e } L\subset K_\varepsilon\}$$

$$=\| h_K(v)-h_L(v)\|_\infty$$

① Dimostrare che $h_{K+L}=h_K+h_L$.

② Dimostrare che se K e L sono due poligoni convessi e p indica il perimetro, allora $p(K+L)=p(K)+p(L)$.

③ Dimostrare che $\operatorname{Area}(K+rB)=\operatorname{Area}(K)+p(K)r+\pi r^2$

④ Ogni poligono convesso è la somma di triangoli e segmenti.

⑤ Se $K\subset L$ (K convesso), allora $p(K)\le p(L)$.

Il problema isoperimetrico

Simmetrizzazione di Steiner e di Schwarz.
Disuguaglianza di Brunn-Minkowski.

Teorema isoperimetrico.

1. Tra tutti i quadrilateri di perimetro assegnato il quadrato è quello di area massima.

2. Tra tutti i quadrilateri con lunghezze dei lati assegnate quelli ciclici hanno area massima.

3. Tra tutti i poligoni di n lati inscritti in una circonferenza fissata quello regolare ha area massima e perimetro massimo.