Fisica 1 Elettronica e Telecomunicazioni. Compito del 15/4/2019

LEGGERE LE NOTE SUL RETRO

Problema 1 (6 punti) In una gara di regolarità un pilota deve percorrere nel tempo minimo un tratto $d = 500$ m, partendo e arrivando da fermo. Le caratteristiche del mezzo sono tali che l'accelerazione massima vale $a_1 = 2$ m/s^2, mentre in frenata la decelerazione massima vale $a_2 = 3$ m/s^2. Supponendo che il moto sia rettilineo, determinare

(a) Il rapporto R tra il tempo di accelerazione e quello di di decelerazione

(b) La velocità massima raggiunta V.

Soluzione: Chiamiamo t_1 il tempo di accelerazione e t_2 quello di decelerazione. Quindi $d_1 = (1/2)a_1t_1^2$ e la velocità alla fine del primo tratto è $V = a_1t_1$ (velocità massima).

Nel secondo tratto si parte dalla velocità V, quindi $d_2 = Vt_2 - (1/2)a_2t_2^2$ e dato che si finisce a velocità nulla $V - a_2t_2 = 0$.

Sostituendo V nell'ultima equazione abbiamo $a_1t_1 - a_2t_2 = 0$, ovvero

$$R = \frac{t_1}{t_2} = \frac{a_2}{a_1} \simeq 1.50.$$

Da

$$d = d_1 + d_2 = \frac{1}{2}a_1t_1^2 + a_1t_1t_2 - \frac{1}{2}a_2t_2^2$$

sostituendo $t_1 = Rt_2$ si ha

$$d = \frac{1}{2}a_1R^2t_2^2 + a_1Rt_2^2 - \frac{1}{2}a_2t_2^2$$

ovvero

$$t_2 = \sqrt{\frac{2da_1}{a_2(a_2 + a_1)}} \simeq 11.55 \text{ s}$$

e quindi

$$t_1 \simeq 17.32 \text{ s}.$$

Dato che $V = a_1t_1$ abbiamo

$$V = a_1t_1 = \sqrt{\frac{2da_1a_2}{a_1 + a_2}} \simeq 34.64 \text{ m/s}.$$

Le distanze percorse sono

$$d_1 = \frac{1}{2}a_1t_1^2 \simeq 300.00 \text{ m},$$

e

$$d_2 = Vt_2 - \frac{1}{2}a_2t_2^2 \simeq 200.00 \text{ m}.$$

Problema 2 (6 punti) Un punto materiale di massa $m = 2$ kg scende lungo un piano scabro inclinato di un angolo $\alpha = 60°$ rispetto all'orizzontale. Alla fine del piano inclinato incontra un tratto orizzontale sempre scabro di pari lunghezza. Determinare il massimo coefficiente di attrito dinamico μ perché il punto possa raggiungere la fine del tratto orizzontale.

Soluzione: Indichiamo con ℓ la lunghezza del piano inclinato.

L'energia potenziale $V = mg\ell\sin(\alpha)$ viene dissipata in lavoro di attrito, $L_1 = \mu mg\ell\cos(\alpha)$ e $L_2 = \mu mg\ell$, ovvero

$$mg\ell\sin(\alpha) = \mu mg\ell(1 + \cos(\alpha))$$

da cui

$$\mu = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} \simeq 0.58$$

Problema 3 (10 punti) Uno yo-yo di raggio $r = 3$ cm e massa $m = 150$ g è assimilabile a un cilindro omogeneo. Intorno a tale yo-yo è avvolto un filo lungo $\ell = 50$ cm.

Si lascia andare lo yo-yo con il filo completamente arrotolato e lo yo-yo appeso. Trascurando la dissipazione, e supponendo che lo yo-yo giri alla fine del filo a velocità costante, determinare:

(a) La massima velocità angolare Ω (quando lo yo-yo è nel punto più basso);

(b) La massima tensione τ della fune (stesso istante);

(c) Il periodo T del moto (due volte il tempo che ci mette ad arrivare nel punto più basso).

Soluzione: Il momento d'inerzia del disco rispetto al punto di attacco della corda è $I = (3/2)mr^2 \simeq 20.25 \cdot 10^{-5}$ kg $\cdot$ m^2.

Il disco rotola senza strisciare sulla corda, quindi la relazione tra velocità del baricentro v e velocità angolare ω è $v = \omega r$. L'energia potenziale iniziale $mg\ell$ diventa energia cinetica alla fine

$$mg\ell = \frac{1}{2}I\Omega^2 = \frac{3}{4}mr^2\Omega^2$$

da cui

$$\Omega = \sqrt{\frac{4g\ell}{3r^2}} \simeq 85.20 \text{ rad/s}.$$

La tensione τ del filo è quella necessaria a supportare la rotazione del disco (rotazione intorno al punto di attacco del filo) con velocità angolare Ω più il peso del disco, quindi

$$\tau = m\Omega^2r + mg = mg\left(\frac{4\ell}{3r} + 1\right) \simeq 34.14 \text{ N}.$$

Per confronto, l'accelerazione angolare α lungo la discesa (ricavabile dalla II cardinale nel punto di contatto) è

$$\alpha = \dot{\omega} = \frac{2g}{3r},$$

e la tensione τ_1 durante la discesa (ricavabile dalla II cardinale nel centrpo di massa) è

$$\tau_1 = \frac{mg}{3}.$$

Per trovare il tempo necessario alla discesa occorre prima calcolare quello necessario a percorrere il filo t_1 (accelerazione costante) e poi quello t_2 necessario a fare un quarto di giro

Durante la discesa l'accelerazione angolare α viene dalla seconda cardinale

$$I\alpha = mgr; \qquad \alpha = \frac{2g}{3r} \simeq 217.78 \text{ rad/s}^2$$

e quindi

$$\ell = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{1}{2}\alpha rt_1^2$$

da cui

$$t_1 = \frac{2\ell}{\alpha r} = \sqrt{\frac{3\ell}{g}} \simeq 0.39 \text{ s}$$

e per fare il giro

$$\Omega t_2 = \frac{\pi}{2}$$

da cui

$$t_2 = \frac{\pi}{2\Omega} \simeq 0.02 \text{ s}$$

e quindi

$$T = 2(t_1 + t_2) \simeq 0.82 \text{ s}.$$

Problema 4 (6 punti) Una nave di ferro (densità 8 volte quella dell'acqua) di massa $m = 400$ t galleggia in un bacino di carenaggio di superficie $S = 10000$ m^2, con i 3/4 del suo volume sott'acqua. A un certo punto affonda completamente, e tutta l'aria esce (rimane solo il ferro). Di quanto si alza ($\Delta h > 0$) o si abbassa ($\Delta h < 0$) il pelo dell'acqua nel bacino?

Soluzione: Chiamiamo V il volume della nave, e $v = m/8\rho_A \simeq 50.00$ m^3 quello del solo ferro. Mentre galleggia, la spinta di Archimede è tale da sostenere la nave, quindi

$$mg = \frac{3}{4} V \rho_A g,$$

da cui

$$V_{\text{imm}} = \frac{3}{4} V = \frac{m}{\rho_A} \simeq 400.00 \text{ m}^3$$

Quando galleggia, la nave sposta un volume di acqua pari a $V_{\text{imm}} = 3/4V$, quando è affondata sposta un volume uguale a v, quindi

$$\Delta V = v - \frac{3}{4} V = \frac{m}{\rho_A}\left(\frac{1}{8} - 1\right) = -\frac{7m}{8\rho_A} \simeq -350.00 \text{ m}^3$$

che corrisponde a un abbassamento

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{S} = -\frac{7m}{8S\rho_A} \simeq -3.50 \text{ cm}$$

Problema 5 (8 punti) Due moli di gas ideale, inizialmente nello stato denominato 1, vengono messi a contatto termico con un serbatoio a temperatura $T = 800$ K e raggiungono mediante una trasformazione isocora irreversibile uno stato termodinamico 2 ($T_2 = 800$ K). Tramite una espansione isoterma reversibile il gas raggiunge lo stato 3 tale che $V_3 = rV_2$ con $r = 2$. Successivamente, il gas viene riportato allo stato 1 mediante una trasformazione isobara reversibile. Il calore specifico del gas è $c_P = 2R$.

Determinare:

(a) Il calore ΔQ_{12} scambiato nella trasformazione 1-2.

(b) Il lavoro W fatto nel ciclo.

(c) Il rendimento η del ciclo.

Soluzione: Il calore specifico a volume costante c_V si ottiene da $c_P - c_V = R$, quindi

$$c_V = R \simeq 8.3 \text{ J/mol}.$$

Dalla legge dei gas perfetti lungo l'isoterma abbiamo ($V_2 = V_1$ e $P_3 = P_1$)

$$P_2V_2 = P_3V_3 \leftrightarrow P_2V_1 = P_1V_3$$

e dato che $V_3 = rV_2 = rV_1$

$$P_2 = rP_1.$$

A questo punto abbiamo

$$P_1V_1 = nRT_1$$
$$P_2V_2 = nRT_2$$

da cui

$$T_2 = rT_1$$

Il lavoro W è l'area del ciclo, ovvero il lavoro dell'isoterma più il lavoro (negativo) dell'isobara

$$W_{23} = nRT_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) = nRT_2 \ln(r);$$

$$W_{31} = P_1(V_1 - V_3) = P_3V_3\left(\frac{1}{r} - 1\right) = nRT_2\left(\frac{1}{r} - 1\right)$$

e quindi

$$\begin{aligned} W &= nRT_2\left(\ln(r) + \left(\frac{1}{r} - 1\right)\right) \\ &\simeq 2564.99 \text{ J}. \end{aligned}$$

Bisogna adesso calcolare i calori scambiati

Nella trasformazione 1-2 non c'è lavoro, dato che è una isocora, quindi

$$\Delta Q_{12} = U_2 - U_1 = nc_V(T_2 - T_1) = nc_VT_2\left(1 - \frac{1}{r}\right) \simeq 6640.00 \text{ J}.$$

Nell'isoterma il calore è uguale al lavoro

$$\Delta Q_{23} = W_{23} = nRT_2 \ln(r);$$

nell'isobara il calore è dato dalla variazione dell'energia interna (negativa) + il lavoro (negativo)

$$\Delta Q_{31} = -\Delta Q_{12} + W_{31}$$

Il rendimento η è $W/(\Delta Q_{12} + \Delta Q_{23})$

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{nRT_2\left(\ln(r) + \left(\frac{1}{r} - 1\right)\right)}{nc_VT_2\left(1 - \frac{1}{r}\right) + nRT_2\ln(r)} \\ &= \frac{\ln(r) - \left(1 - \frac{1}{r}\right)}{\frac{c_V}{R}\ln(r) + \left(1 - \frac{1}{r}\right)} \simeq 0.16. \end{aligned}$$

NOTE

Istruzioni. Scrivere nome, cognome e matricola nell'ultima pagina (e lasciarla possibilmente bianca). Indicare chiaramente quale domanda viene trattata. Per ogni domanda scrivere succintamente le leggi fisiche usate, i passaggi effettuati, la soluzione analitica (con i simboli) e quella numerica (con le unità di misura). Consegnare solo la bella copia, marcando chiaramente le parti che non devono essere considerate. Trattenere la brutta copia o comunque appuntarsi i risultati per confrontarli con la soluzione (Moodle).

Valutazione. Viene valutato l'aver indicato correttamente le leggi usate, la derivazione analitica, il risultato analitico e numerico corretto. Se è presente il solo risultato analitico o numerico l'esercizio non viene considerato valido. ATTENZIONE: gli errori numerici non sono considerati errori gravi a meno che non siano facilmente riconoscibili dall'analisi dimensionale o da valori particolari dei parametri (per esempio se per una scelta dei parametri un risultato viene assurdo o zero senza che sia fisicamente giustificato). Anche per questo, aspettate a sostituire i valori numerici alla fine.

Alcune grandezze utili. Accelerazione di gravità: $g = 9.8$ m/s^2. Momento di inerzia baricentrale di un cilindro di raggio R e massa M: $I_G = (1/2)MR^2$. Momento di inerzia baricentrale di un'asta omogenea di lunghezza L e massa M: $I_G = (1/12)ML^2$. Costante dei gas $R = 8.3$ J/mol K. Conversione calorie-joule: 1 kcal = 4184 J. Pressione atmosferica $P_a = 10^5$ Pa. Calore specifico molare di un gas monoatomico $c_V = (3/2)R$, di un gas biatomico $c_V = (5/2)R$. Densità dell'acqua $\rho_a \simeq 1000$ kg/m^3.

Suggerimenti. LEGGERE ACCURATAMENTE E RILEGGERE IL TESTO DEL PROBLEMA. Attenzione alla conversione tra unità (equivalenze). I problemi possono contenere dati che non servono per trovare la soluzione. Di solito esistono più modi per arrivare alla soluzione. FARE IL DISEGNO del problema, in maniera più accurata possibile e magari da più punti di vista, e disegnare i diagrammi temporali delle componenti della traiettoria ($x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$...).