Alcune equazioni differenziali lineari

0.0.1 Sistemi con autovalori reali

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x'(t) = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) \\ y'(t) = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) \end{cases}$$

e supponiamo che la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ abbia autovalori reali distinti λ_1 e λ_2 con rispettivi autovettori $\begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

Allora la soluzione generale del sistema è costituita da

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

con α, $\beta \in \mathbb{R}$.

0.0.2 Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

La soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \text{ con } b, c \in \mathbb{R}$$

dipende dal segno di $\Delta = b^2 - 4c$.

1. Se $\Delta > 0$ chiamiamo λ_1, λ_2 le due radici reali dell'equazione $x^2 + bx + c = 0$. Allora la soluzione generale è $y(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t}$ con α, $\beta \in \mathbb{R}$.

2. Se $\Delta = 0$, chiamiamo λ la radice doppia dell'equazione $x^2 + bx + c = 0$. Allora la soluzione generale è $y(t) = \alpha e^{\lambda t} + \beta t e^{\lambda t}$.

3. Se $\Delta < 0$, allora la soluzione generale è $y(t) = \alpha e^{-bt/2} \cos(t\sqrt{-\Delta}/2) + \beta e^{-bt/2} \sin(t\sqrt{-\Delta}/2)$.

La soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) + by'(t) + cy(t) = d, \text{ con } b, c, d \in \mathbb{R}$$

è data dalla soluzione generale dell'equazione omogenea associata $y''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ sommata a una soluzione particolare, che può essere scelta come $y(t) = d/c$ se $c \neq 0$ o altrimenti come un polinomio in t di grado ≤ 2.