Fisica 1 Elettronica e Telecomunicazioni. Compito del 13/6/2019

LEGGERE LE NOTE SUL RETRO

Problema 1 (6 punti) Le equazioni parametriche di un punto materiale, che descrive una curva a spirale con partenza nell'origine, sono :

$$x = At\sin(\omega t)$$
$$y = At\cos(\omega t)$$

con $A = 0.5$ m/s e $\omega = 0.2$ rad/s. Determinare:

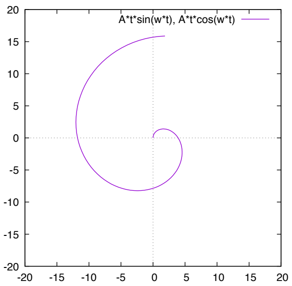
(a) Qual è la distanza d dall'origine,

(b) Il modulo v della velocità,

(c) Il modulo a dell'accelerazione

dopo un giro a partire da $t = 0$.

Soluzione: La curva è



Per prima cosa troviamo il tempo T corrispondente a 1 giro:

$$\omega T = 2\pi$$

da cui

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \simeq 31.42 \text{ s},$$

ma in realtà è più comodo usare $\omega T = 2\pi$.

Per tale tempo $x(T) = 0$ e

$$y(T) = d = AT = \frac{2\pi A}{\omega} \simeq 15.71 \text{ m}.$$

La velocità è

$$\dot{x} = A\left(\sin(\omega t) + t\omega\cos(\omega t)\right),$$
$$\dot{y} = A\left(\cos(\omega t) - t\omega\sin(\omega t)\right),$$

al tempo T abbiamo

$$\dot{x}(T) = AT\omega,$$
$$\dot{y}(T) = A,$$

$$v = A\sqrt{1 + T^2\omega^2} = A\sqrt{1 + 4\pi^2} \simeq 3.18 \text{ m/s}$$

L'accelerazione è

$$\ddot{x} = A\omega\left(2\cos(\omega t) - t\omega\sin(\omega t)\right),$$
$$\ddot{y} = -A\omega\left(2\sin(\omega t) + t\omega\cos(\omega t)\right),$$

al tempo T abbiamo

$$\ddot{x} = 2A\omega,$$
$$\ddot{y} = -AT\omega^2,$$

e il suo modulo a al tempo T è

$$a = A\omega\sqrt{4 + T^2\omega^2} = 2A\omega\sqrt{1 + \pi^2} \simeq 0.66 \text{ m/s}$$

Problema 2 (10 punti) Wile E. Coyote (massa $m = 50$ kg) vuole afferrare al volo Beep Beep mentre sta correndo lanciandosi giù, al momento giusto, da un ponte alto $h = 50$ m con una corda elastica legata ad un piede. Il modulo elastico (coefficiente di elasticità per unità di lunghezza) della corda è $k = 300$ N (la costante di elasticità totale della corda è $K = k/\ell$, con ℓ lunghezza della corda).

(a) Approssimando il coyote e l'uccello con due punti materiali, quale deve essere la lunghezza ℓ della corda perché Wile possa sperare di acchiappare Beep Beep senza sfracellarsi al suolo?

(b) Qual è la massima forza F esercitata dalla molla su Wile?

(c) Wile sa che Beep Beep viaggia a una velocità $v = 80$ km/h, e quindi dipinge una linea sulla strada in modo che se lui si lancia dal ponte quando l'uccello passa da lì, si incontrano nel punto sotto la verticale del ponte. Dire come si può fare a determinare a che distanza dal punto di impatto deve dipingere la linea (anche senza calcolare esplicitamente tale distanza).

Soluzione: Per avere una speranza di acchiappare Beep Beep bisogna imporre che la massima oscillazione della corda sia h. Indicando con ℓ la lunghezza della corda, questa si allunga di un tratto $h - \ell$. Nel punto di massimo allungamento l'energia potenziale iniziale mgh si è convertita totalmente nell'energia elastica della corda $(1/2)K(h-\ell)^2 = (1/2)k(h-\ell)^2/\ell$, quindi

$$(h-\ell)^2 = 2\frac{mgh}{k}\ell = a\ell,$$

con $a = 2mgh/k \simeq 163.33$ m, ovvero

$$\ell^2 - (2h + a)\ell + h^2 = 0,$$

e quindi

$$\ell = \frac{2h + a \pm \sqrt{a(4h+a)}}{2} = \begin{cases} 253.47 \text{ m} \\ 9.86 \text{ m} \end{cases}$$

di cui ovviamente solo il secondo valore ha un senso fisico.

La forza della corda è massima quando è allungata al massimo, e vale

$$F = K(h-\ell) = k\frac{h-\ell}{\ell} \simeq 1220.82 \text{ N}.$$

L'equazione di moto di Wile ($y(t)$) è per il primo pezzo (caduta libera)

$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

per un tratto lungo ℓ, ovvero per $0 < t < t_0 = \sqrt{2\ell/g} \simeq 1.42$ s, che raggiunge con velocità $v_0 = \sqrt{2g\ell} \simeq 13.90$ m/s, dopodiché il moto è un moto armonico, centrato intorno alla posizione di equilibrio y_0 data da

$$K(h - y_0 - \ell) = k\frac{h - y_0 - \ell}{\ell} = mg$$

da cui

$$y_0 = h - \ell - \frac{mg\ell}{k} \simeq 24.03 \text{ m}.$$

Le oscillazioni sono di ampiezza y_0.

L'equazione del moto è dato dalla seconda legge di Newton (per $y < h - \ell$)

$$m\ddot{y} = mg + K(h - \ell - y)$$

(che per $\ddot{y} = 0$ dà di nuovo la posizione di equilibrio).

L'equazione omogenea dà la pulsazione $\omega = \sqrt{K/m} \simeq 0.78$ rad/s.

Quindi scrivendo un moto armonico generico,

$$y(t) = y_0 + y_0 \cos(\omega t + \phi)$$

e derivando la velocità

$$\dot{y}(t) = -\omega y_0 \sin(\omega t + \phi)$$

si ottiene ϕ imponendo che $y(0) = h - \ell$ e che $v(0) = v_0$ (prendendo qui come origine del tempo il momento in cui la corda è tesa).

Quindi si ottiene

$$\tan(\phi) = -v_0/\omega(h - \ell - y_0) \simeq -1.11; \qquad \phi \simeq -0.84 \text{ rad}$$

e infine si ottiene il tempo t_1 tale che $y = 0$ e $v = 0$ (punto più basso), ovvero $\cos(\omega t_1 + \phi) = 1$ e $\sin(\omega t_1 + \phi) = 0$, ovvero

$$\omega t_1 + \phi = 0; \qquad t_1 = -\frac{\phi}{\omega} \simeq 0.27 \ (s)$$

Quindi Wile deve dipingere la linea in modo che Beep Beep l'attraversi $t_0 + t_1 \simeq 1.68$ s prima che arrivi sotto la verticale del ponte, quindi a una distanza

$$d = v(t_0 + t_1) \simeq 37.44 \text{ m}.$$

Problema 3 (8 punti) In *Ritorno al Futuro I*, un fulmine ferma la lancetta dei minuti e quella delle ore dell'orologio del tribunale alle 22:04 del 12 novembre 1955, e così resteranno per almeno 30 anni. Nello stesso istante il fulmine spezza il meccanismo che regola la lancetta dei secondi, che sta passando per le ore 12, muovendosi di moto continuo e non a scatti. La lancetta dei secondi diventa così libera di ruotare sul perno. La lancetta si può approssimare con un'asta omogenea lunga $\ell = 80$ cm di massa $m = 0.8$ kg.

Trascurando tutti gli attriti e supponendo che il fulmine non abbia comunicato nessun impulso alla lancetta, determinare con quale velocità angolare ω questa passerà per le ore 6.

Soluzione: Chiamiamo $\omega_0 = 2\pi/60$ la velocità angolare iniziale della lancetta dei secondi. Il suo momento di inerzia rispetto al perno (estremo) è $I = m\ell^2/3 \simeq 0.17 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. La conservazione dell'energia ci dice che

$$I\omega_0^2 + \frac{mgl}{2} = I\omega^2 - \frac{mgl}{2}$$

da cui

$$\omega^2 = \frac{3g}{\ell} + \omega_0^2,$$

ovvero

$$\omega \simeq 6.06 \text{ rad/s}.$$

Problema 4 (6 punti) Wile E. Coyote vuole ordinare una ventosa circolare da ACME™ per appendersi ad un lastrone di pietra, in modo da sorprendere Beep Beep. Dato che lui ha una massa $m = 50$ kg, che raggio r dovrà avere al minimo la ventosa?

Soluzione: La forza peso di Wile E. Coyote dev'essere compensata dalla pressione atmosferica $p = 10^5$ pa moltiplicata la superficie della ventosa, per cui

$$mg = \pi r^2 p,$$

e quindi

$$r = \sqrt{\frac{mg}{\pi p}} \simeq 3.95 \text{ cm}$$

Problema 5 (6 punti) Si costruisce una centrale termica con una potenza $P = 1$ GW vicino ad un ghiacciaio, dove il ghiaccio sta scivolando in un lago. Il ghiaccio è praticamente al punto di fusione ($T_1 = 0$°C), e si usa come sorgente fredda, la temperatura dell'acqua è $T_2 = 4$°C e costituisce la sorgente calda. Come macchina termica si usa una macchina di Carnot. Sapendo che il calore latente di fusione del ghiaccio è $\lambda = 3.3 \cdot 10^5$ J/kg, determinare l'entità del danno ambientale (ovvero quanto ghiaccio si scioglie) in un'ora.

Soluzione: La quantità di lavoro W è data dal prodotto della potenza per il tempo, ovvero

$$W = 3.60 \cdot 10^{12} \text{ J}.$$

Il rendimento η della macchina di carnot è dato dalla temperatura delle sorgenti

$$\eta = \frac{W}{Q^{\swarrow}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \simeq 0.014$$

da cui si può ottenere il calore immesso

$$Q^{\swarrow} = \frac{W}{\eta} \simeq 249.43 \cdot 10^{12} \text{ J}$$

e quello ceduto

$$Q^{\nearrow} = W - Q^{\swarrow} \simeq -245.83 \cdot 10^{12} \text{ J}$$

che, diviso per il calore latente, ci da la massa m di ghiaccio fuso in un'ora

$$m = \frac{W}{\lambda}\left(1 - \frac{1}{\eta}\right) \simeq 744.95 \cdot 10^6 \text{ kg}$$

NOTE

Istruzioni. Scrivere nome, cognome e matricola nell'ultima pagina (e lasciarla possibilmente bianca). Indicare chiaramente quale domanda viene trattata.

Per ogni domanda scrivere succintamente la strategia che si intende seguire (indicando le leggi fisiche usate) e dare la soluzione analitica (con i simboli) e quella numerica (con le unità di misura). In assenza delle indicazioni della strategia usata l'esercizio sarà nullo.

Consegnare solo la bella copia, marcando chiaramente le parti che non devono essere considerate. Trattenere la brutta copia o comunque appuntarsi i risultati per confrontarli con la soluzione (Moodle).

Valutazione. Viene valutato l'aver indicato correttamente le leggi usate, la derivazione analitica, il risultato analitico e numerico corretto. **Se è presente il solo risultato analitico o numerico l'esercizio non viene considerato valido.** ATTENZIONE: gli errori numerici non sono considerati errori gravi a meno che non siano facilmente riconoscibili dall'analisi dimensionale o da valori particolari dei parametri (per esempio se per una scelta dei parametri un risultato viene assurdo o zero senza che sia fisicamente giustificato). Anche per questo, aspettate a sostituire i valori numerici alla fine.

Alcune grandezze utili. Accelerazione di gravità: $g = 9.8$ m/s^2. Momento di inerzia baricentrale di un cilindro di raggio R e massa M: $I_G = (1/2)MR^2$. Momento di inerzia baricentrale di un'asta omogenea di lunghezza L e massa M: $I_G = (1/12)ML^2$. Costante dei gas $R = 8.3$ J/mol K. Conversione calorie-joule: 1 kcal = 4184 J. Pressione atmosferica $P_a = 10^5$ Pa. Calore specifico molare di un gas monoatomico $c_V = (3/2)R$, di un gas biatomico $c_V = (5/2)R$. Densità dell'acqua $\rho_a \simeq 1000$ kg/m^3.

Suggerimenti. LEGGERE ACCURATAMENTE E RILEGGERE IL TESTO DEL PROBLEMA. Attenzione alla conversione tra unità (equivalenze). I problemi possono contenere dati che non servono per trovare la soluzione. Di solito esistono più modi per arrivare alla soluzione. FARE IL DISEGNO del problema, in maniera più accurata possibile e magari da più punti di vista, e disegnare i diagrammi temporali delle componenti della traiettoria ($x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$...).