

**Esercizio 1.** Verificare, facendo uso della definizione, il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1} + 2}{\sqrt{x-1} + 3} + (x-1) \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{2}{3}.$$

**Esercizio 2.** Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 3x + 2) \ln^2(x^3)}{(\mathbf{e}^x - \mathbf{e})(\cos(\sqrt{x} - 1) - 1)}.$$

**Esercizio 3.** Studiare, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^n - n^n}{n!} \frac{k^{n^n}}{\mathbf{e}^n}.$$

**Esercizio 4.** Per  $R \in \mathbb{R}^+$  sia  $D_R$  l'insieme del piano:

$$D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Si consideri l'insieme di numeri reali  $A_R$ :

$$A_R = \{(1 - x^2)(1 - y^2)(1 - x^2 - y^2) \mid (x, y) \in D_R\}.$$

(a) Per  $0 < R \leq 1$ , calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di  $A$ . Specificare se si tratta di massimo o minimo.

(b) Per  $1 < R < \frac{1}{\sqrt{2}}$  calcolare  $\sup A$ . Stabilire, inoltre, se esiste finito  $\inf A$  e determinarne il segno.