

Esercizio 1. Calcolare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\cos(\sin(x^{\frac{3}{2}})) \right) + \frac{x^3}{2}}{\left(\sin(x^2) - \tan(x^2) \right) \cos(\sin^3 x)}$$

Esercizio 2. Calcolare il valore dell'integrale definito:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{6x}}{\sqrt{4 - e^{2x}}} dx.$$

Esercizio 3. Si consideri la famiglia di funzioni

$$f(x) = \arctan \left(\frac{a}{x} \right) + x,$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

- Determinare il dominio di $f(x)$;
- Determinare eventuali asintoti per $f(x)$;
- Discutere la continuità di f per $x \in \mathbb{R}$ e classificare eventuali punti di discontinuità;
- Trovare i punti critici per f e classificarli;
- Stabilire se esistono valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui f risulta invertibile e determinare tali valori. Detta $g(x)$ la funzione inversa calcolare $g'(\frac{\pi}{4} + a)$.

Esercizio 4. Si discuta la convergenza del seguente integrale improprio al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0, \alpha \neq 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\alpha \left| \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right|^\beta dx.$$

[Attenzione: valutare tutti i punti in cui l'integrale risulta improprio.]