PROVA SCIRTTA di ANALISI I,

CdS in Fisica e Astrofisica, 13 gennaio 2017

Esercizio 1. Approssimare $\ln\left(\frac{5}{6}\right)$ con un errore inferiore a 10^{-6}.

Esercizio 2. Calcolare il valore del seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\ \sin(2x)}{3\sin(x)+6-\cos^2(x)}\,dx.$$

Esercizio 3. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. Si considerino le seguenti affermazioni:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge; (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n+1}$ converge; (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{|a_n|}$ converge.

Dire se le affermazioni sono una implicazione dell'altra. Nei casi affermativi dimostrarlo, altrimenti fornire dei controesempi.

** FACOLTATIVO: dire se esistono ipotesi aggiuntive su a_n che garantiscano l'implicazione logica tra le affermazioni e dimostrarlo.

Esercizio 4. Si consideri la funzione

$$f(x) = x\ln(x) - x - \cos(x).$$

(a) Dimostrare che f ammette un unico minimo nell'intervallo $(0,1)$.

(b) Il valore del minimo è compreso tra -2 e -1.

ESERCIZIO 1: $\ln(5/6) = \ln(1-1/6)$

$$\ln(1-x) = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + R_n(x)$$

dove $|R_n(x)| \leq \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \quad \exists \xi \in (0,x)$

quindi, per avere $R_n(\frac{1}{6}) < 10^{-6}$ cerco n t.c. $\frac{1}{(1-\xi)^{n+1}} \left|\frac{1}{6}\right|^{n+1} < 10^{-6}$

essendo $f^{(k)}(\xi) = \frac{(-1)\, k!}{(1-\xi)^k} \quad \forall k \geq 1$.

oss $0 < \xi < \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{5}{6} < 1-\xi < 1 \Rightarrow \frac{1}{(1-\xi)^{n+1}} < \frac{6^{n+1}}{5^{n+1}}$

$\Rightarrow$ cerco n t.c. $\frac{\cancel{6^{n+1}}}{5^{n+1}} \frac{1}{\cancel{6^{n+1}}} < 10^{-6}$ cioè $5^{n+1} > 10^6$

$5^n > 2 \cdot 10^5 = 2^6 \cdot 5^5$

$2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2$

oss: $5^3 \geq 2^6 \cdot 5^5$ essendo $5 > 2^2$ $\rightarrow$ $\boxed{\text{scelgo } n=8}$

$$\ln(5/6) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2\cdot 6^2} - \frac{1}{3\cdot 6^3} + \frac{1}{4\cdot 6^4} - \frac{1}{5\cdot 6^5} + \frac{1}{6\cdot 6^6} - \frac{1}{7\cdot 6^7} + \frac{1}{8\cdot 6^8} + R_8$$

con $|R_8| < 10^{-6}$

ESERCIZIO 2: $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cdot \sin(2x)}{3\sin x + 6 - \cos^2 x}\, dx$

$$\begin{array}{l|l} t^2 & t^2+3t+5 \\ \hline t^2 + 3t + 5 & 1 \\ // \;\; -3t \;\; -5 & \end{array}$$

$\sin x = t$
$\cos x\, dx = dt$

$$I = \int_0^1 \frac{2t^2}{t^2+3t+5}\, dt =$$

$$= 2\int_0^1 \left(1 - \frac{3t+5}{t^2+3t+5}\right) dt = \left(1 - \int_0^1 \frac{3t+5}{t^2+3t+5}\, dt\right) \cdot 2$$

oss: t^2+3t+5 NON ha radici $\Rightarrow$ cerco A, B:

$\frac{A(2t+3)}{t^2+3t+5} + \frac{B}{t^2+3t+5} \iff 2At + 3A + B = 3t + 5 \iff \begin{cases} 2A = 3 \\ 3A + B = 5 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} A = 3/2 \\ B = 5 - 3A = 5 - 9/2 = 1/2 \end{cases}$

quindi $I = 2 - 2\left(\int_0^1 \frac{3}{2} \frac{(2t+3)}{t^2+3t+5} + \frac{1}{2} \frac{1}{t^2+3t+5}\, dt\right) =$

$= 2 - 3 \ln(t^2+3t+5)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{(t+\frac{3}{2})^2 + \frac{11}{4}}\, dt =$

$= 2 - 3(\ln(9) - \ln(5)) + \frac{4}{11}\int_0^1 \frac{1}{\frac{4}{11}(t+\frac{3}{2})^2 + 1}\, dt =$ $\quad \frac{2}{\sqrt{11}}(t+\frac{3}{2}) = y$, $\quad \frac{2}{\sqrt{11}} dt = dy$

$= 2 - 3\ln(9/5) + \frac{4}{11} \cdot \int_{\frac{3}{\sqrt{11}}}^{\frac{5}{\sqrt{11}}} \frac{1}{1+y^2}\, dy =$

2 X

$= 2 - 3\ln(9/5) + \frac{4}{11} \arctan y \Big|_{\frac{3}{\sqrt{11}}}^{\frac{5}{\sqrt{11}}} = 2 - 3\ln\left(\frac{9}{5}\right) + \frac{4}{11}\left(\arctan\frac{5}{\sqrt{11}} - \arctan\frac{3}{\sqrt{11}}\right).$

ESERCIZIO 3.

sia $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}$ non converge

$\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{|a_n|}$ non converge

$\Rightarrow$ (a) $\not\Rightarrow$ (b)

(a) $\not\Rightarrow$ (c)

sia $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ dispari} \\ n & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$ allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}$ converge

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ non converge

$\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{|a_n|}$ non converge

$\Rightarrow$ (b) $\not\Rightarrow$ (a)

(b) $\not\Rightarrow$ (c)

sia a_n: $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{|a_n|}$ converge allora $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{|a_n|} = 0 \Rightarrow \forall n \geq N$ $\sqrt{|a_n|} \geq |a_n|$

da cui $\sum |a_n|$ converge per confronto $\Rightarrow \sum a_n$ converge

inoltre $\sum_i |a_{2n+1}| \leq \sum_i |a_n|$ e quindi $\sum_i |a_{2n+1}|$ converge

cioè (c) $\Rightarrow$ (a) e (c) $\Rightarrow$ (b)

oss: • se $a_n \geq 0$ allora $\sum_i a_{2n+1} \leq \sum a_n \Rightarrow$ (a) $\Rightarrow$ (b). ma ancora (b) $\not\Rightarrow$ (a), (b) $\not\Rightarrow$ (c), (a) $\not\Rightarrow$ (c)

• se $a_n \geq 0$, $a_n \searrow$ allora $\sum_i a_{2n} \leq \sum_i a_{2n+1}$ $\Rightarrow$ se $\sum a_{2n+1}$ converge allora $\sum a_{2n}$ converge

$\Rightarrow \sum a_n$ converge quindi (b) $\Rightarrow$ (a)

ESERCIZIO 4: $f(x) = x\ln x - x - \cos x$

(a). $f \in C^1((0,1))$ $\lim_{x\to0^+} f(x) = -1$; $f(1) = -1-\cos 1$.

• $f'(x) = \ln x + \sin x \in C^0((0,1))$

oss: $\lim_{x\to0^+} f' = -\infty < 0$

$f'(1) = \sin 1 > 0$

$\Rightarrow$ per il teo dei valori intermedi $\exists \bar{x} \in (0,1)$: $f'(\bar{x}) = 0$

essendo $f'' = \frac{1}{x} + \cos x > 0$ in $(0,1)$

OSS: $f' \nearrow$ in $(0,1) \Rightarrow \exists$ al più una soluz $f' = 0$

in particolare $\bar{x}$ è l'unico p.to critico

segno di f': $-\ \overset{\bar{x}}{0}\ +$

monotonia di f: $\searrow\ \nearrow$

$\Rightarrow$ in $\bar{x}$ si ha un p.to di MIN $\bar{x} \in (0,1)$.

(b) oss: $f(0) = -1 \Rightarrow f(\bar{x}) = \min_{x\in(0,1)} f < -1$

oss: $x\ln x \geq -\frac{1}{e}$ $\forall x \in (0,1)$ essendo $(x\ln x)' = \ln x + 1 \Rightarrow$ per $x = \frac{1}{e}$ si ha p.to di min

$-x - \cos x \geq -1 - \cos 1$ da cui $f(x) \geq \underbrace{-\frac{1}{e}}_{\sim 0,37} - 1 \underbrace{- \cos 1}_{\sim 0,54} > -2$