PROVA SCIRTTA di ANALISI I,
CdS in Fisica e Astrofisica, 10 aprile 2017

Esercizio 1. Per $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri

$$F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{1} \alpha \, \frac{\mathrm{e}^t}{t} \, dt.$$

(a) Determinare α in modo che $F'(1) = -\frac{1}{2}$;
(b) analizzare la convessità di $F(x)$ in un intorno del punto $x = 1$.

Esercizio 2. Calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{\sin x \cos x} - \mathrm{e}^{\tan x}}{2 \arcsin(x^3) - x \arctan(x^2)}.$$

Esercizio 3. Siano $f, g : \mathbb{R} \to [0,1]$. Dimostrare che

$$\inf\{f(x) + g(x) \ : \ x \in \mathbb{R}\} \geq \inf\{f^2(x) \ : \ x \in \mathbb{R}\} + \inf\{g^2(x) \ : \ x \in \mathbb{R}\}.$$

Esercizio 4. Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ si consideri la famiglia di funzioni

$$f(x) = \frac{x^2}{\log_a x}.$$

Determinarne:
(a) il campo di esistenza D;
(b) eventuali asintoti;
(c) eventuali estremi relativi e classificarli;
(d) estremo superiore e inferiore in D.

$\boxed{\text{ES. 1}}$ $\quad F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{1} \alpha \frac{e^t}{t}\,dt$

(a) $F'(x) = -\alpha \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{x} = -\frac{\alpha}{2}\frac{e^{\sqrt{x}}}{x}$

quindi: $F'(1) = -\frac{1}{2} \iff -\frac{\alpha}{2} e = -\frac{1}{2} \iff \alpha = \frac{1}{e}$

(b) $F \in C^2(\mathcal{U}_{\{x=1\}})$ essendo $\frac{e^{\sqrt{x}}}{x} \in C^2(\mathcal{U}_{\{x=1\}})$ con $\mathcal{U}_{\{x=1\}}$ intorno di $x=1$

quindi F convessa in $\mathcal{U}_{\{x=1\}}$ $\iff F''(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{U}_{\{x=1\}}$

$F''(x) = -\frac{\alpha}{2}\frac{e^{\sqrt{x}}}{2x^2\sqrt{x}}(x-2)$. $F''(1) = -\frac{\alpha}{2}\frac{e}{2}(-1) = \frac{\alpha}{4}e > 0$ per $\alpha = \frac{1}{e}$

quindi essendo $F''(x) \in C^0(\mathcal{U}_{\{x=1\}})$ si ha, per la permanenza del segno

$F''(x) > 0$ in $\mathcal{V}_{\{x=1\}}$ $\exists\, \mathcal{V}_{\{x=1\}}$ intorno del punto $x=1$

$\Rightarrow F$ convessa in un intorno del punto $x=1$.

$\boxed{\text{ES 2}}$ $\quad \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\sin x \cos x} - e^{\operatorname{tg} x}}{2\arcsin(x^3) - x \operatorname{arctg}(x^2)}$

num: $e^{\sin x\cos x} - e^{\operatorname{tg}x} = e^{\sin x\cos x}\left(1 - e^{\frac{\sin^3 x}{\cos x}}\right) = \underbrace{\frac{e^{\sin x\cos x}}{\cos x}(-1)\frac{\left(1-e^{\frac{\sin^3 x}{\cos x}}\right)}{\frac{\sin^3 x}{\cos x}}}_{\text{oss: } \xrightarrow[x\to 0]{} (+1)} \cdot(-\sin^3 x) =$

$= \Theta(1)(-\sin^3 x)$

denom: (dagli sviluppi) $\arcsin x^3 = x^3 + o(x^3)$
$\operatorname{arctg} x^2 = x^2 + o(x^2)$

quindi: denominatore $= 2x^3 - x(x^2 + o(x^2)) + o(x^3) = x^3 + o(x^3)$

da cui: $\frac{\text{num}}{\text{den}} = \frac{\Theta(1)(-\sin^3 x)}{x^3 + o(x^3)} \longrightarrow -1.$

$\boxed{\text{OPPURE}}$ (+ calcoloso!) si sviluppa anche il numeratore

$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\left(2x - \frac{8x^3}{6} + o(x^3)\right) = x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$

$\Rightarrow e^{\sin x\cos x} = 1 + \left(x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) =$

$= 1 + x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$\operatorname{tg}x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$

$\Rightarrow e^{\operatorname{tg}x} = 1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^3 + o(x^3) =$

$= 1 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

Siano $f, g: \mathbb{R} \to [0,1]$. Provare che

ES.3 $\inf\{f(x)+g(x) : x\in\mathbb{R}\} \geq \inf\{f^2(x) : x\in\mathbb{R}\} + \inf\{g^2(x) : x\in\mathbb{R}\}$

Sia $\mu = \inf\{f\}$, $\nu = \inf\{g\}$ allora $\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x)\geq\mu$, $g(x)\geq\nu$ $\Rightarrow$ $\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x)+g(x)\geq\mu+\nu$

cioè $\mu+\nu$ è un minorante e quindi per def. $\inf\{f+g\}\geq\mu+\nu$

osserviamo: $f(x)\in[0,1]$, $g(x)\in[0,1]$ $\Rightarrow$ $f^2(x)\leq f(x)$, $g^2(x)\leq g(x)$ e quindi $\inf\{f^2\}\leq\inf\{f\}$, $\inf\{g^2\}\leq\inf\{g\}$

da cui

$$\inf\{f(x)+g(x)\}\geq\inf\{f(x)\}+\inf\{g(x)\}\geq\inf\{f^2(x)\}+\inf\{g^2(x)\}.$$

$\boxed{\text{ES. 4}}$ $f(x) = \dfrac{x^2}{\log_a x}$

- La funzione è definita per $a>0$, $a \neq 1$

$x \in \mathbb{R}: \begin{cases} x>0 \\ \log_a x \neq 0 \end{cases}$ cioè $D = \{x>0 : x \neq 1\} = (0,1) \cup (1,+\infty)$

con $a>0$; $a \neq 1$.

- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^-$ $a>1$
$\phantom{\lim_{x\to 0^+} f(x)} = 0^+$ $0<a<1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty \Longrightarrow \nexists$ asintoti orizz.

$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^-} f(x) = \mp\infty \\ &\lim_{x\to 1^+} f(x) = \pm\infty \end{aligned}\right] \Rightarrow$ la retta $\{x=1\}$ è asintoto verticale $\forall a>0, a\neq 1$

cerco as. obliqui

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log_a x} = \pm\infty$

$\Longrightarrow \nexists$ as. obliqui

- f derivabile $\forall x \in D$

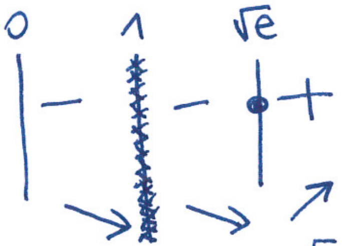
$$f'(x) = \frac{2x \log_a x - x^2 \frac{1}{x} \log_a e}{(\log_a x)^2} = \frac{x}{(\log_a x)^2}\left(2\log_a x - \log_a e\right)$$

Punti critici: $f'=0 \iff 2\log_a x = \log_a e$ (essendo $x \neq 0$)

$x^2 = e \iff x = \sqrt{e}$ (essendo $x>0$)

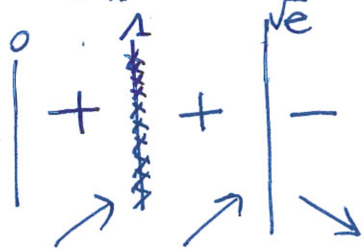
segno f':

$\boxed{\text{per } a>1}$



in $x=\sqrt{e}$ si ha un
- MIN locale per $a>1$
- MAX locale per $0<a<1$

$\boxed{\text{per } 0<a<1}$



- $\sup_{x\in D} f(x) = +\infty$; $\inf_{x\in D} f(x) = -\infty$ $\forall a>0$, $a \neq 1$.

essendo f non limitata né sup. né inf (si vedano i limiti $x\to 1^\pm$ f.)