PROVA SCIRTTA di ANALISI I,
CdS in Fisica e Astrofisica, 26 giugno 2017

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2} - \mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x} - 7\mathrm{e}^x + 10}},$$

tralasciando lo studio della derivata seconda.

Esercizio 2. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \arctan(\sqrt{x-1}) \left(1 + \frac{2}{x\sqrt{x-1}\big(\arctan(\sqrt{x-1}) - 2\big)} \right) dx.$$

Esercizio 3. Data $f : [0,5] \to \mathbb{R}$, continua nell'intervallo $[0,5]$ e derivabile con continuità nell'intervallo $(0,5)$, tale che

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 4, \qquad f(5) = 5,$$

(a) dimostrare che esiste un'intersezione tra il grafico di f e il grafico della retta $y = 3x$; nell'intervallo $(0,5)$.

(b) dimostrare che esiste un punto $c \in (0,5)$ tale che $f'(c) = 3$.

(Suggerimento: si utilizzi il punto (a))

Esercizio 4. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si consideri la successione numerica

$$a_n = \frac{(\sqrt[n]{n} - k)^n}{n^k}.$$

(a) Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}$ per $k \leq 1$.

(b) Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}$ per $k > 1$. (Fare attenzione al segno di a_n)

CORREZIONE COMPITO 26.06.17

ES1 $f(x) = \dfrac{1-2e^x}{2\sqrt{e^{2x}-7e^x+10}}$

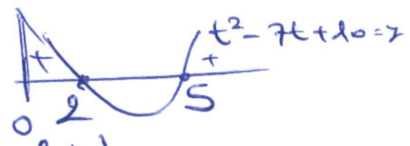
OSSERVO: $f(x)=g(e^x)$ con $g(t) = \dfrac{1-2t}{2\sqrt{t^2-7t+10}}$ posso quindi studiare $g(t)$, $t>0$

infatti, poiché $t=e^x$ è funzione strett. crescente, convessa, si ha:

- $f(x)$ ha min/max/flex/asintoto verticale in $x_0 \iff$
  $g(t)$ ha " " " " in $t_0 = e^{x_0}$
- $f(x)$ ha asintoto orizzontale per $x\to+\infty$ la retta $y=y_0 \iff$
  $g(t)$ " $t\to+\infty$ " $y=y_0$
- segno di $f(x)$: $f(x) \gtrless 0$ in $x_0 \iff g(t) \gtrless 0$ in $t_0=e^{x_0}$

$\boxed{\text{Studio } g(t)}$, $t>0$ (essendo $t=e^x>0$)

- $D = \{t\in\mathbb{R}^+ : t^2-7t+10>0\} = (0,2)\cup(5,+\infty)$



- segno di $g(t)$: (NOTA: $g(t)\gtrless 0$ in $t_0 \iff f(x)\gtrless 0$ in $x_0=\ln t_0$)

  $g(t) > 0 \iff 0<t<\frac{1}{2}$

  $g(t)=0 \iff t=1/2$

  $g(t)<0 \iff t\in(\frac{1}{2},2)\cup(5,+\infty)$

- $\lim_{t\to0^+} g(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{10}}$; $\lim_{t\to2^-} g(t) = -\infty$; $\lim_{t\to5^+} g(t) = -\infty$

  $\lim_{t\to+\infty} g(t) = -1$ $\rightsquigarrow$ le rette $t=2$ e $t=5$ sono AS. VERT (sinistro e destro, rispett.)
  la retta $y=-1$ è as. orizzontale per $t\to+\infty$

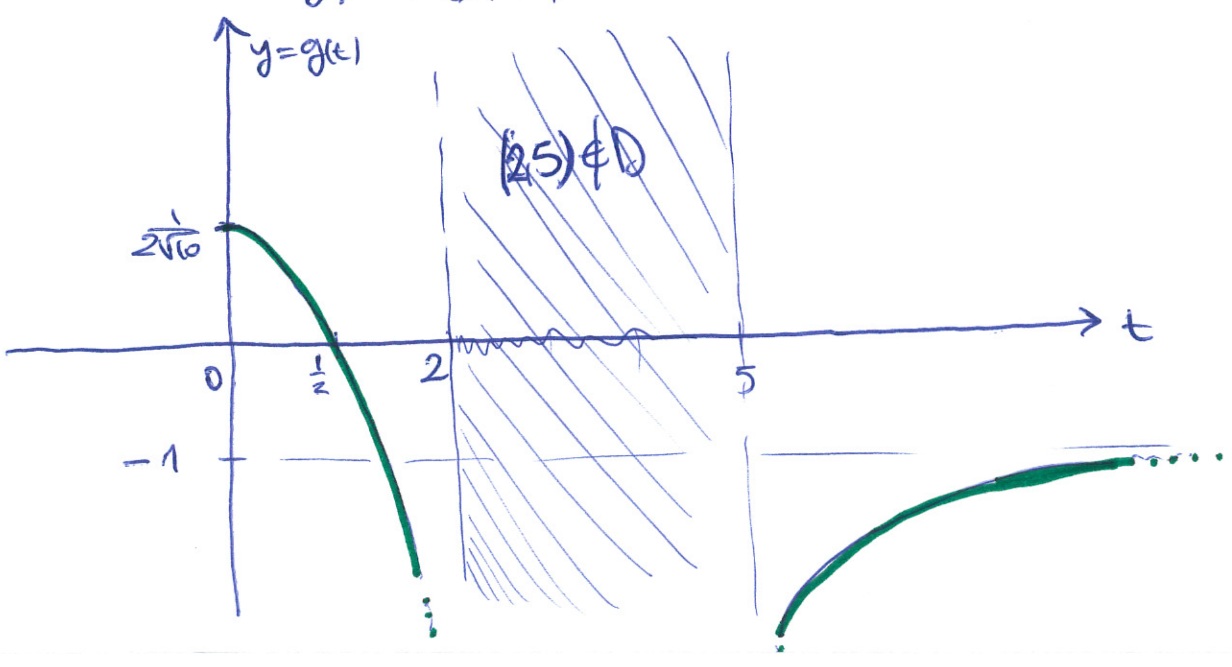
- $g'(t) = \dfrac{-1}{\sqrt{\cdots}} - \dfrac{(1-2t)}{2}\,\dfrac{1}{2}\,\dfrac{2t-7}{(\cdots)^{3/2}} = \dfrac{12t-33}{4(t^2-7t+10)^{3/2}}$

p.ti critici $g'=0 \iff t=\frac{33}{12} \notin D$

quindi g monotona in ogni intervallo del dominio. In particolare:

$g \downarrow$ in $(0,2)$, poiché segno $g' \iff$ segno di $2t-33$.

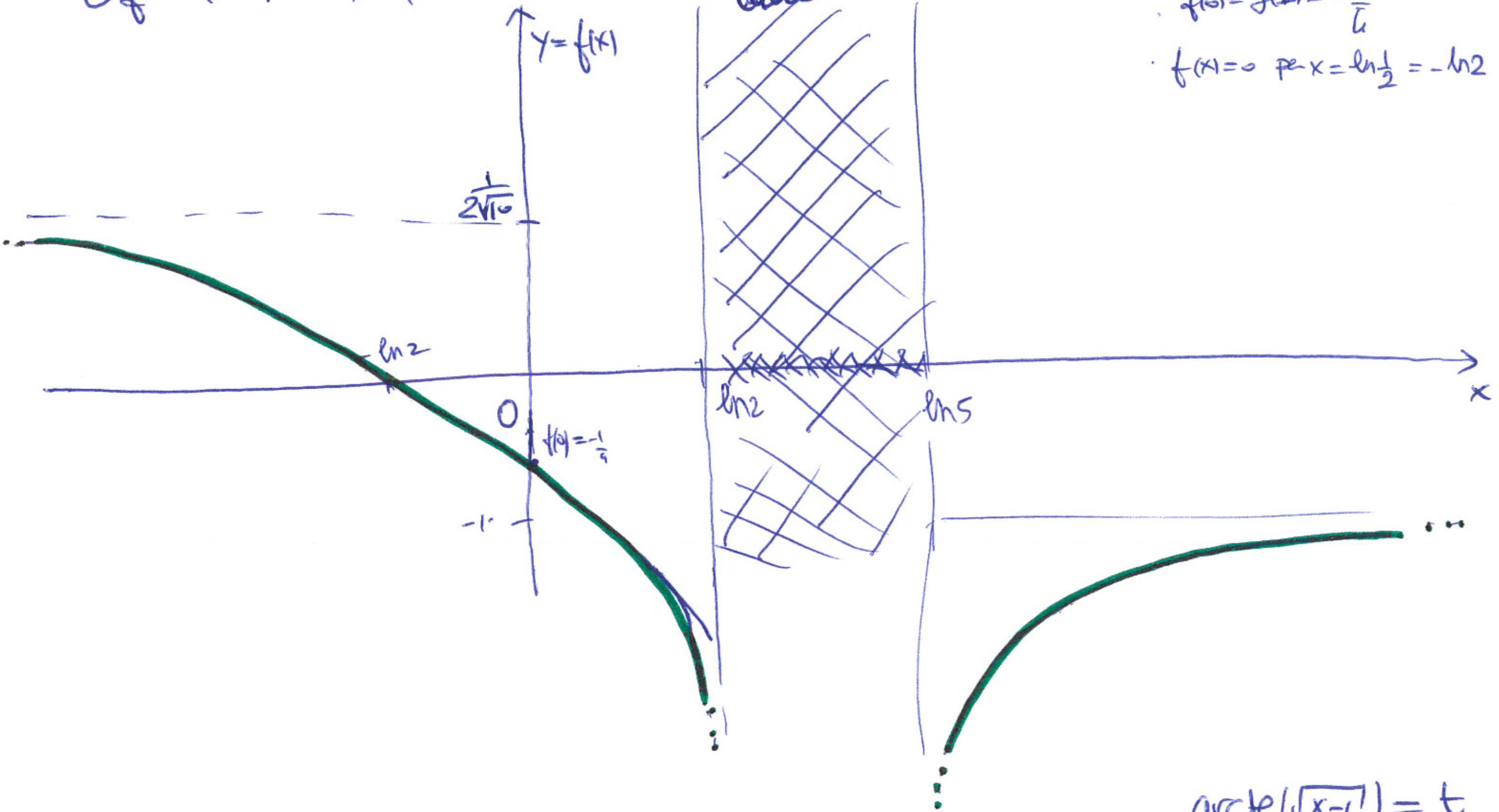
$g \nearrow$ in $(5,+\infty)$



[Continua ES 1] dal grafico di $g(t)$ si ricava il grafico qualitativo di $f(x)$

$D_f = (-\infty; \ln 2) \cup (\ln 5; +\infty)$

- $f(0) = g(1) = -\frac{1}{4}$
- $f(x) = 0$ per $x = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$



ES2. calcolare $\int \operatorname{arctg}(\sqrt{x-1})\left(1 + \frac{2}{x\sqrt{x-1}\,(\operatorname{arctg}(\sqrt{x-1}) - 2)}\right)dx \;\underset{\swarrow}{=}$

$\operatorname{arctg}(\sqrt{x-1}) = t \quad (\circ)$

$x = (\operatorname{tg} t)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$

$\boxed{dx = 2\frac{\sin t}{\cos^3 t}\,dt}$

inoltre da $(\circ)$

$dt = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\,\frac{1}{1+(\sqrt{x-1})^2}\,dx$ cioè

$dt = \frac{1}{2\sqrt{x-1}\cdot x}\,dx$

$$= \int t \cdot \frac{2\sin t}{\cos^3 t}\,dt + \int \frac{2t}{t-2}\,2dt =$$

$$\overset{P.P.}{=} \frac{t}{\cos^2 t} - \int \frac{1}{\cos^2 t}\,dt + 4\int 1 + \frac{2}{t-2}\,dt =$$

$$= \frac{t}{\cos^2 t} - \operatorname{tg} t + 4t + 8\ln|t-2| + c =$$

$$= \underline{(\operatorname{arctg}\sqrt{x-1})\cdot x} - \sqrt{x-1} + 4\operatorname{arctg}(\sqrt{x-1}) + 8\ln\left|\operatorname{arctg}(\sqrt{x-1}) - 2\right| + C.$$

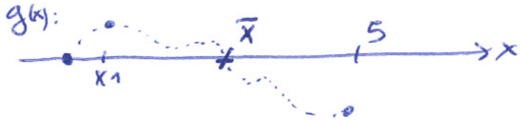
ES.3. $f:[0,5]\to\mathbb{R}$. Definisco $g(x)=f(x)-3x$ $g:[0,5]\to\mathbb{R}$

(a) · $g\in C^0([0,5])$ perché somma di funzioni continue

· $g\in C^1((0,5))$ " " $C^1((0,5))$

$g(0)=0$ e $g'(0)=f'(0)-3=4-3=1>0 \Rightarrow$ in un intorno dx di $x_0=0$ g è una funzione crescente

$\Rightarrow \exists x_1$ t.c. $g(x_1)>g(0)=0$.



$g(5)=5-15<0$.

Per il teorema di $\exists$ degli zeri $\exists\ \bar x\in(x_1,5)$: $g(\bar x)=0$ cioè $f(\bar x)=3\bar x$

(b) Per il teorema di Lagrange applicato ad f nell'intervallo $[0,\bar x]$ si ha che $\exists\ \xi\in(0,\bar x)$ t.c. $f'(\xi)=\dfrac{f(\bar x)-f(0)}{\bar x-0}=\dfrac{f(\bar x)}{\bar x}\underset{\text{dal punto (a)}}{=}\dfrac{3\bar x}{\bar x}=3$.

OPPURE: se $f\in C^1([0,5])$: Per il teo di Lagrange $\exists\ \eta\in(0,5)$: $f'(\eta)=\dfrac{f(5)-f(0)}{5-0}=1$

Poiché $f'\in C^0[0,5]$ (e quindi $f'\in C^0[0,\eta]$), per il teorema dei valori intermedi f' prende tutti i valori tra $f'(0)=4$ e $f'(\eta)=1$

ES 4. OSS: $a_n=\dfrac{(\sqrt[n]{n}-k)^n}{n^k}$ $\sqrt[n]{n}\geq1\ \forall n$ e in particolare $\sqrt[n]{n}\to1$

(a) se $k\leq1$ si ha $\sqrt[n]{n}-k\geq0 \Rightarrow a_n\geq0$

considero $\sqrt[n]{a_n}=\dfrac{\sqrt[n]{n}-k}{n^{\frac{k}{n}}}\to\dfrac{1-k}{1}$ ⤳ se $1-k<1$ cioè $\boxed{0<k\leq1}$ allora $\sum a_n$ converge per il criterio della radice

se $1-k>1$ cioè $\boxed{k<0}$ allora $\sum a_n$ diverge per il criterio della radice

se $\boxed{k=0}$ $a_n=(\sqrt[n]{n})^n=n\not\to0$

quindi $\sum a_n$ diverge essendo $a_n\geq0$ e $a_n\not\to0$.

(b) $k>1$ considero $|a_n|=\dfrac{|\sqrt[n]{n}-k|^n}{n^k}$

$\sqrt[n]{|a_n|}=\dfrac{|\sqrt[n]{n}-k|}{n^{k/n}}\longrightarrow|1-k|$ ⤳ se $|1-k|<1$ cioè $\boxed{1<k<2}$ allora $\sum|a_n|$ converge per il criterio della radice e quindi $\sum a_n$ converge

sia $k\geq2$ allora $\exists N(k)$ t.c. $\forall n>N(k)$ $\sqrt[n]{n}-k<0$

quindi definitivamente $a_n=(-1)^n\cdot\dfrac{n}{n^k}\left|1-\dfrac{k}{\sqrt[n]{n}}\right|^n=(-1)^n\dfrac{1}{n^k}\left|k-\sqrt[n]{n}\right|^n$

se $\boxed{k>2}$ allora $\lim|a_n|\underset{\uparrow}{=}+\infty\Rightarrow\sum a_n$ non può convergere

essendo definitivamente $(k-\sqrt[n]{n})>1$.

se $\boxed{k=2}$ allora $|a_n|=\left|\dfrac{(\sqrt[n]{n}-2)^n}{n^2}\right|=\left|(-1)^n\dfrac{(2-\sqrt[n]{n})^n}{n^2}\right|=\dfrac{1}{n^2}\overbrace{(2-\sqrt[n]{n})^n}^{<1}<\dfrac{1}{n^2}\Rightarrow$ Per confronto $\sum a_n$ converge.