PROVA SCIRTTA di ANALISI I,
CdS in Fisica e Astrofisica, 13 luglio 2017

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = x - \log x - \frac{x}{x-1}.$$

Esercizio 2. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza del seguente integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\left(\mathsf{e}^{\frac{1}{x}} - \mathsf{e}^{\sin\frac{1}{x}}\right)(x-2)^2}{\left[1 + \sin^2\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]\left(\sin\frac{1}{x}\right)^\alpha}\, dx$$

Esercizio 3. Per $k \in \mathbb{R}$ si consideri la successione

$$a_n = \left(1 - k\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}.$$

(a) Per $k = 1$ stabilire il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

(b) Per $k \in \mathbb{R}, k \neq 2$ stabilire il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.
(Fare attenzione al segno di a_n)

Esercizio 4. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x + 2\sin x}{(4 - \sin^2 x)\cos^2 x}\, dx.$$

TRACCIA delle SOLUZIONI . compito 13/07/2017

ES 1. $f(x) = x - \ln x - \frac{x}{x-1}$

$\mathbb{D} = (0,1) \cup (1,+\infty)$. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \Rightarrow$ la retta $x=0$ è AS. VERTICALE

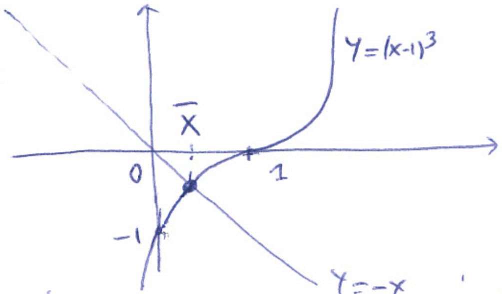
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty \Rightarrow$ la retta $x=1$ è AS. VERTICALE

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = -\infty \Rightarrow \nexists$ AS. ORIZZ, $\nexists$ AS OBLIQUI

• $f'(x) = \frac{(x-1)^3+x}{x(x-1)^2}$. $f'=0 \iff (x-1)^3 = -x$

$\exists!\ \bar{x} : (\bar{x}-1)^3 = -\bar{x}$

$\bar{x} \in (0,1)$

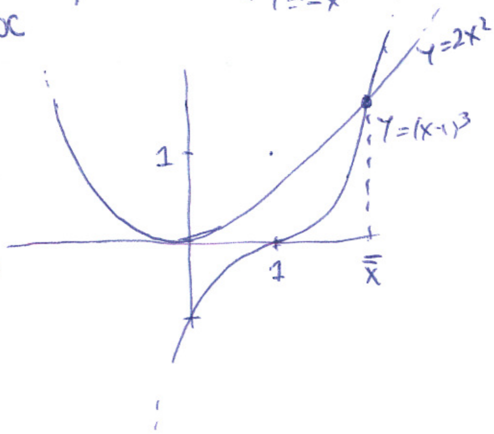


segno f': 0 | $-$ | $\bar{x}$ | $+$ | 1 | $+$

$\bar{x}$ è p.to di MIN loc

• $f''(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{(x-1)^3}$. $f''=0 \iff (x-1)^3 = 2x^2$

$\exists!\ \bar{\bar{x}} : f''(\bar{\bar{x}})=0$



segno f'': 0 | $+$ | 1 | $-$ | $\bar{\bar{x}}$ | $+$

convessa | concava | convessa

ES 2 $\int_1^{+\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\sin\frac{1}{x}}\right)(x-2)^2}{\left[1+\sin^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]\left(\sin\frac{1}{x}\right)^\alpha}\,dx$

l'integrale è improprio solo per $x \to +\infty$. Sia $f(x)$ la funzione integranda.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) \cdot \frac{\frac{1}{x^\alpha}}{x^2\left(1-e^{\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}}\right)} = L$ finito quindi $\lim_{t\to+\infty}\int_1^t f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \left(1-e^{\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}}\right)x^{2+\alpha}\,dx$

$\lim_{x\to+\infty} 1-e^{\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^{\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}}}{-\left(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)}\cdot\left(\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{6x^3}\right)$

quindi

$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t f(x)\,dx \cong \lim_{t\to+\infty}\int_1^t x^{\alpha-1}\,dx$ converge sse $\alpha-1<-1$ cioè $\alpha<0$.

come carattere (convergente/divergente)

ES3. (a) $K=1$ $\quad a_n = \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3} > 0 \quad \forall n$

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2} \longrightarrow 0 \implies \sum a_n \text{ converge per } \boxed{K=1}$$

(b) $K \in \mathbb{R},\ K \neq 2$

$$\lim_n |a_n| = \begin{cases} +\infty & \text{se } |1-K|>1 \\ 1 & \text{se } K=0 \\ 0 & \text{se } |1-K|<1 \end{cases} \implies \sum a_n \text{ NON converge se } \boxed{K\leq 0 \vee K>2}$$

• segno di a_n: $a_n \geq 0$ per $K \leq 1$ $\quad$ poiché $1-K\cos\frac{1}{n} \to 1-K$

definitivamente a_n segno alterno per $K>1$

in particolare poiché $(-1)^{n^3} = (-1)^n$ si ha $a_n = (-1)^n \left(K\cos\frac{1}{n}-1\right)^{n^3}$ per $K>1$.

• $\boxed{0<K<1}$ $\quad \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow 0 \implies \sum a_n$ conv

• $\boxed{1<K<2}$ $\quad a_n = (-1)^n \left(K\cos\frac{1}{n}-1\right)^{n^3}$ con: $\left(K\cos\frac{1}{n}-1\right)^{n^3} > 0 \quad \forall n$

$\left(K\cos\frac{1}{n}-1\right)^{n^3} \longrightarrow 0$.

inoltre: $g(x) = (K\cos x - 1)^{\frac{1}{x^3}}$

è funzione crescente per $x \to 0^+ \implies a_n = g\left(\frac{1}{n}\right) \searrow 0$

per il criterio di Leibniz $\sum a_n$ converge.

ES4. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x + 2\sin x}{(4-\sin^2 x)\cos^2 x}\,dx \underset{u=\cos x}{=} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{3-u^2}{(3+u^2)u^2}\,du = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \left(\frac{1}{u^2} - \frac{2}{3+u^2}\right)du$$