PRIMA PROVA PARZIALE di ANALISI I,
CdS in Fisica e Astrofisica, 7 Novembre 2018

Esercizio 1. Si consideri l'insieme $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$A = \left\{ a \in \mathbb{R} \ t.c. \ \exists (x,y) \in D, a = \frac{\arctan(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \right\},$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ t.c. \ |x| < |y|\}.$$

Stabilire se A è un insieme limitato o illimitato, calcolarne l'estremo superiore e quello inferiore, specificando se sono assunti o meno.

Esercizio 2. Per $k \in \mathbb{N}$ si consideri la successione

$$a_n = \sin\left(\pi \frac{(n+k)^2}{n}\right).$$

(a) Si stabilisca per quali $k \in \mathbb{N}$ la successione a_n è infinitesima.
(b) Si analizzi il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ per $k = 1$.
(c) Stabilire per quali $k \in \mathbb{N}$ la serie converge precisando di che tipo di convergenza si tratta.

Esercizio 3. Utilizzando la definizione di limite di successione o di funzione, rispettivamente, si verifichi uno a scelta dei seguenti limiti:

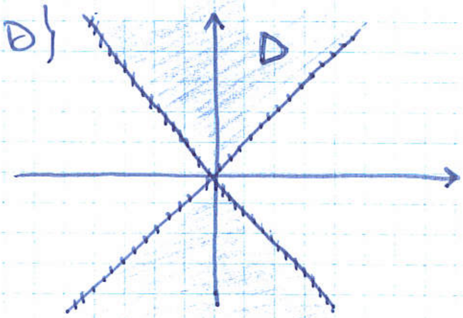
(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-6n+2}{3n^2+5} - \frac{\cos n}{n} = \frac{1}{3}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2-6x+1}{5x^2+3} - x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{3}$.

Esercizio 4. Si consideri il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\Big(\cos(\sin(x^p))\Big)\Big(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\Big)}{\Big(\sin(x^2)-\tan(x^2)\Big)\cos(\sin^3 x)}.$$

(a) Determinare se per $p = 7/8$ il limite esiste ed in caso affermativo determinarne il valore;
(b) discutere l'esistenza (e in caso affermativo determinarne il valore) del limite, al variare del parametro $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$.

ES1 $A=\left\{a\in\mathbb{R}:\ a=\frac{\arctg(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\ :\ (x,y)\in D\right\}$



$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ |x|<|y|\}$

oss: $0<\frac{\arctg(x^2+y^2)}{x^2+y^2}<1 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

- sia $x_n=0$, $y_n=\frac{1}{n}$ allora $(x_n,y_n)\in D\ \forall n\in\mathbb{N}$

$\Longrightarrow a_n=\frac{\arctg(1/n^2)}{1/n^2}\in A\ \forall n\in\mathbb{N}$

Poiché $\lim_n a_n=1$ si ha $\sup A=1$ e non è assunto in quanto $\frac{\arctg(t)}{t}\lneq 1\ \forall t\in\mathbb{R}$.

- sia $x_n=0$, $y_n=n$ allora $(x_n,y_n)\in D\ \forall n\in\mathbb{N} \Longrightarrow a_n=\frac{\arctg(n^2)}{n^2}\in A\ \forall n\in\mathbb{N}$

poiché $0<\arctg(n^2)<\frac{\pi}{2}$ si ha $\lim_n a_n=0$

$\Longrightarrow \inf A=0$ e non è assunto in quanto $\arctg(t)\neq 0\ \forall t\neq 0$.

ES2 $a_n=\sin\left(\pi\frac{(n+k)^2}{n}\right)=\sin\left(\pi\underbrace{\frac{n^2+2kn}{n}}_{=n+2k\in\mathbb{Z}}+k^2\frac{\pi}{n}\right)=(-1)^{n+2k}\sin\left(k^2\frac{\pi}{n}\right)=$

$=(-1)^n\sin\left(k^2\frac{\pi}{n}\right)$

$\sin(\xi+m\pi)=(-1)^m\sin\xi$

quindi (a) $a_n\to 0\ \forall k\in\mathbb{N}$ essendo $k^2\frac{\pi}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

(b)
(c) $\forall k\in\mathbb{N},\ k\neq 0$ si ha $a_n=(-1)^n b_n$ con $b_n\geq 0$ per n suff. grande (t.c. $k^2\frac{\pi}{n}<\pi$ cioè $n>k^2$)

e $b_n=\sin\left(k^2\frac{\pi}{n}\right)=\Theta\left(k^2\frac{\pi}{n}\right)$

quindi $\sum_i a_n$ non è assolut. conv. essendo $\sum_i\frac{\pi}{n}$ serie divergente e quindi $\sum b_n$ div.

D'altra parte $k^2\frac{\pi}{n}$ è succ $\searrow 0$ quindi $\sin\left(k^2\frac{\pi}{n}\right)\searrow 0\ \forall k\in\mathbb{N}$ e per Leibnitz $\sum_i(-1)^n b_n$ converge. $\forall k\in\mathbb{N}$.

ES. 3. $\lim_{n} \frac{n^2-6n+2}{3n^2+5} - \frac{\cos n}{n} = \frac{1}{3}$

fix $\varepsilon>0$ cerco N_0: $\forall n>N_0$ $\left|\frac{n^2-6n+2}{3n^2+5} - \frac{\cos n}{n} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{n^2-6n+2}{3n^2+5} - \frac{\cos n}{n} - \frac{1}{3}\right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{disug. triang}}}{\le} \left|\frac{n^2-6n+2}{3n^2+5} - \frac{1}{3}\right| + \left|\frac{-\cos n}{n}\right| \le$$

$$\le \left|\frac{n^2-6n+2-(n^2+\frac{5}{3})}{3n^2+5}\right| + \frac{1}{n} \qquad (\cdot\cdot)$$

ora: se $n>N_1=\left\lceil\frac{2}{\varepsilon}\right\rceil$ allora $\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$

· considero $\left|\frac{\cancel{n^2}-6n+2-(\cancel{n^2}+5/3)}{3n^2+5}\right| = \left|\frac{6n-1/3}{3n^2+5}\right|$ cerco N_2: $\forall n>N_2$ si ha

$|6n-1/3| < \frac{\varepsilon}{2}(3n^2+5)$ cioè $\underbrace{\frac{3\varepsilon}{2}n^2-6n+\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{2}\varepsilon\right)}_{\text{è una "parabola"}}>0$ $(\cdot)$

$\frac{\Delta}{4} = 9 - 3\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{2}\varepsilon\right) =$

$= 9 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{14}{4}\varepsilon^2 > 0$ per ε piccolo

quindi vale $(\cdot)$ $\forall n > x_2 = \frac{3+\sqrt{\Delta/4}}{3\frac{\varepsilon}{2}}$.

sia quindi $\lceil x_2\rceil \doteq N_2$. Vale $(\cdot)$ $\forall n>N_2$

$\Rightarrow$ sia $N \doteq \max\{N_1, N_2\}$ allora $\forall n>N$ vale

$\left|\frac{n^2-6n+2}{3n^2+5} - \frac{1}{3}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $\left|\frac{1}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ da cui la tesi per la $(\cdot\cdot)$

ES 4 $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cos(\sin(x^p)))}{\sin(x^2)-tg(x^2)} \frac{(e^x-e^{\sqrt{x}})}{\cos(\sin^3 x)}$

$p>0$ quindi $\cos(\sin(x^p)) \to 1$ da cui

· $\ln(\cos(\sin(x^p))) = \underbrace{\frac{\ln(1-(1-\cos(\sin(x^p))))}{1-\cos(\sin(x^p))}}_{\to -1} \underbrace{\frac{1-\cos(\sin(x^p))}{\sin^2(x^p)}}_{\to 1/2} \cdot \underbrace{\frac{\sin^2(x^p)}{x^{2p}}}_{\to 1} \cdot x^{2p}$

$= -\frac{1}{2}\Theta(x^{2p})$

· $e^x - e^{\sqrt{x}} = \underbrace{e^{\sqrt{x}}}_{\to 1} \underbrace{\frac{(e^{x-\sqrt{x}}-1)}{x-\sqrt{x}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{(\sqrt{x}-1)}_{\to -1}\sqrt{x} = -1\cdot\Theta(x^{1/2})$ $\Big\} \Rightarrow$ num $= \frac{1}{2}\Theta(x^{2p+\frac{1}{2}})$

· $\sin(x^2) - tg(x^2) = \underbrace{\frac{tg(x^2)}{x^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{\cos(x^2)-1}{x^4}\right)}_{\to -1/2} \cdot x^6 = -\frac{1}{2}\Theta(x^6)$ $\Big\} \Rightarrow$ den $= -\frac{1}{2}\Theta(x^6)$

quindi $\frac{\ln(\cos(\sin(x^p)))}{\sin(x^2)-tg(x^2)} \cdot \frac{(e^x-e^{\sqrt{x}})}{\cos(\sin^3 x)} = \frac{+1/2\ \Theta(x^{2p+\frac{1}{2}})}{-1/2\ \Theta(x^4)} \to \begin{cases} \text{se } 2p+\frac{1}{2}=6 & \lim=-1 \\ \text{se } 2p+\frac{1}{2}>6 & \lim=0 \\ \text{se } 2p+\frac{1}{2}<6 & \lim=-\infty \end{cases}$

quindi: poiché $2\cdot\frac{7}{8}+\frac{1}{2}=\frac{9}{4}<6$ si ha che lim per $p=\frac{7}{8}$ $=-\infty$.