SECONDA PROVA PARZIALE di **ANALISI MATEMATICA I**,
CdS in Fisica e Astrofisica, 21 Dicembre 2018

Esercizio 1. Calcolare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(e^{\tan\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}\right)^2 + \alpha(\sin x - x)}{\sqrt[3]{1+x^{\frac{7}{2}}} - \cos(x^3)}.$$

Esercizio 2. Calcolare

$$\int_0^K \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x - \sin^2 x - 8\sin x + 12}\,dx,$$

per $K = \frac{\pi}{2}$ e $K = \pi$.

Esercizio 3. Sia $f(x) = \ln(ax) + (a+1)\sqrt{x+2}$, per $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Studiare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = -a$

Esercizio 4. Per $b \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $g(x)$ definita in $D = (-1; +\infty)$:

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \\ \tan x + bx^2 - \ln(1+x) & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Provare che per ogni $b \in \mathbb{R}$ la funzione g è derivabile con continuità su tutto D;

(b) [Facoltativo] Trovare tutti i valori di $b \in \mathbb{R}$ per cui g risulta due volte derivabile in D.

CALCOLARE, AL VARIARE DEL PARAMETRO $\alpha \in \mathbb{R}$ **ES. 1**

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\left(e^{\operatorname{tg}\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}\right)^2 + \alpha(\sin x - x)}{\sqrt[3]{1 + x^{7/2}} - \cos x^3}$$

DENOMINATORE (CI DIRÀ DOVE FERMARSI). CON LE TAVOLE:

$$1 + \frac{1}{3}x^{7/2} - 1\left(+\frac{x^6}{2}\right) + o\left(x^{7/2}\right) = \frac{1}{3}x^{7/2} + o\left(x^{7/2}\right)$$

NUMERATORE: GLI SVILUPPI DI e^x E $e^{\operatorname{tg} x}$ LI TROVATE SULLE TAVOLE (QUELLE CHE HO MESSO SU MOODLE)

$$\frac{1}{2}x^{3/2} - \frac{1}{6}x^{3/2} + \frac{9}{4!}x^2 - \frac{1}{4!}x^2 + o(x^2) = \frac{1}{3}x^{3/2} + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)$$

$$\Rightarrow \left(e^{\operatorname{tg}\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}x^{3/2} + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{9}x^3 + \left(\frac{1}{9}x^4\right) + \frac{2}{9}x^{7/2} + o\left(x^{7/2}\right)$$

$$\alpha(\sin x - x) = -\alpha\frac{x^3}{6} + o(x^4) \Rightarrow \text{SE } \frac{-\alpha}{6} = -\frac{1}{9} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{2}{3}}$$

IL TERMINE IN x^3 SPARISCE ED IL LIMITE FA

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{2}{9}x^{7/2} + o\left(x^{7/2}\right)}{\frac{1}{3}x^{7/2} + o\left(x^{7/2}\right)} = \frac{2}{3}$$

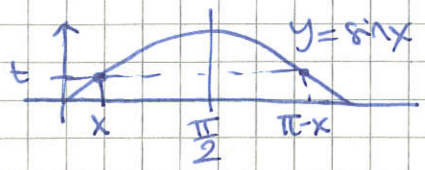
SE $\boxed{\alpha \neq \frac{2}{3}}$ IL TERMINE IN x^3 RESTA $\left(>0 \text{ SE } \alpha < \frac{2}{3},\ <0 \text{ SE } \alpha > \frac{2}{3}\right)$

ED IL LIMITE FA $+\infty$ $\quad \alpha < \frac{2}{3}$

$-\infty$ $\quad \alpha > \frac{2}{3}$

ES 2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x - \sin^2 x - 8\sin x + 12}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{\cos^3 x}{(\sin x - 2)^2(\sin x + 3)}\,dx$

la SOSTITUZIONE: $\sin x = t$ è ammissibile solo dove $\sin x$ è invertibile!



in $[0,\pi]$ $\sin x$ NON è invertibile

in $[0,\pi/2]$ $\sin x$ è invertibile e si ha $x = \arcsin t$

$[\frac{\pi}{2};\pi]$ " $x = \pi - \arcsin t$

quindi:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x - \sin^2 x - 8\sin x + 12}\,dx \underset{\substack{x=\arcsin t \\ dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt}}{=} \int_0^1 \frac{1-t^2}{(t-2)^2(t+3)}\,dt \underset{\substack{\exists A,B,C\in\mathbb{R} \\ A=-17/25;\ B=-3/5;\ C=-\frac{8}{25}}}{=}$$

$$= \int_0^1 \frac{A}{t-2} + \frac{B}{(t-2)^2} + \frac{C}{t+3}\,dt = A\ln|t-2| - \frac{B}{t-2} + C\ln|t+3|\Big|_0^1 =$$

$$= -A\ln 2 + B - \frac{B}{2} + C\ln 4 - C\ln 3 = -A\ln 2 + \frac{B}{2} + C\ln\frac{4}{3}.$$

invece

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x - \sin^2 x - 8\sin x + 12}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{'''}\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{'''}\,dx \underset{\substack{x=\arcsin t \text{ se } x\in[0,\frac{\pi}{2}] \\ x=\pi-\arcsin\tau \text{ se } x\in[\frac{\pi}{2};\pi]}}{=}$$

$$= \int_0^1 \frac{1-t^2}{(t-2)^2(t+3)}\,dt + \int_1^0 \frac{(1-\tau^2)(-\sqrt{1-\tau^2})}{(\tau-2)^2(\tau+3)}\left(\frac{-1}{\sqrt{1-\tau^2}}\right)d\tau =$$

$$= \int_0^1 \frac{1-t^2}{(t-2)^2(t+3)}\,dt - \int_0^1 \frac{1-\tau^2}{(\tau-2)^2(\tau+3)}\,d\tau = 0.$$

si poteva anche osservare che $f(x) \doteq \cos^3 x / (\sin x - 2)^2(\sin x + 3)$

si ha $f(\pi - x) = -f(x)$ cioè f ha una simmetria centrale rispetto a $x = \pi/2$ $\Rightarrow \int_0^{\pi} f(x)\,dx = 0$ per simmetria.

ES3. $f(x)=\ln(ax)+(a+1)\sqrt{x+2}$. Studio $f(x)=-a$

D_f: se $a>0$ allora $D=(0,+\infty)$
se $a<0$, $a\neq-1$ $D=[-2,0)$
se $a=-1$ $D=(-\infty,0)$

oss: $\forall x\in D$ $f(x)\in C^0$. Inoltre f derivabile in $\mathring{D}$ e si ha

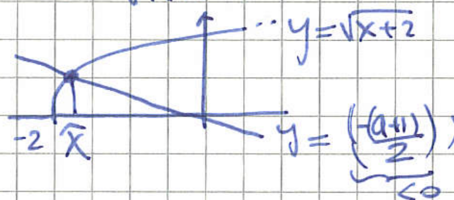
$$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{(a+1)}{2}\frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

. Punti critici: se $a>0$ $f'>0$ in D, $f\nearrow$
se $a\leq-1$ $f'<0$ in D, $f\searrow$
se $-1<a<0$ allora $\exists!\ \hat{x}$ punto critico MAX loc

f': $+\ \hat{x}\ -$
f: $\nearrow\ \searrow$

infatti $f'=0$ sse $\frac{1}{x}=\frac{-(a+1)}{2}\frac{1}{\sqrt{x+2}}$ sse

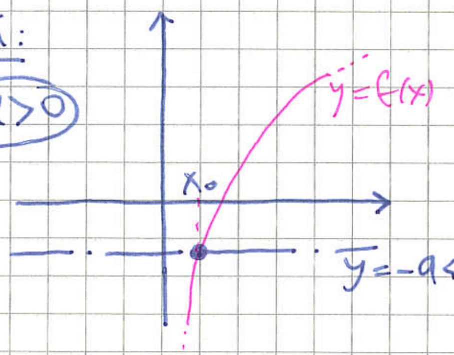
$$\underbrace{\sqrt{x+2}}_{\text{potenza }\frac{1}{2}}=\underbrace{\frac{-(a+1)}{2}x}_{\text{retta}}$$



. Limiti agli estremi di D. se $a>0$. $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty$
. se $a=-1$ $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to0^-}f(x)=-\infty$
. se $a<0$, $a\neq-1$. $\lim_{x\to0^-}f(x)=-\infty$, $f(-2)=\ln(-2a)$

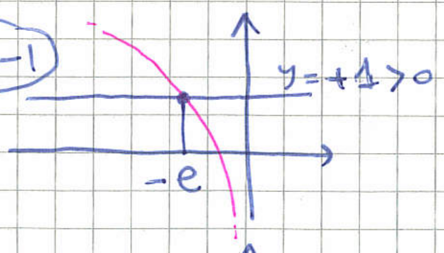
Quindi:

($a>0$)



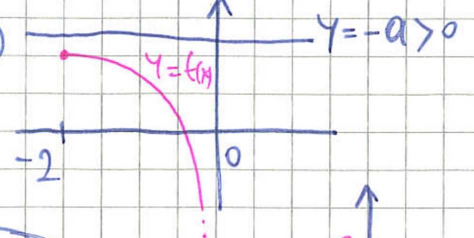
$f\nearrow$ in $(0,+\infty)$; $\lim_{x\to0^+}f=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty}f=+\infty$
$\Longrightarrow\exists!\ x_0:\ f(x_0)=-a\quad\forall a>0$

($a=-1$)



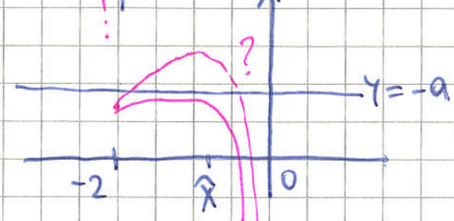
$\exists!\ x_0$ t.c. $f(x_0)=1$ ($x_0=-e$)

($a<-1$)



$\nexists\ x_0:\ f(x_0)=-a$ poiché
$f(-2)=\ln(-2a)<-a\quad\forall a<-1$
e $f\searrow$ in $[-2,0)$.

($-1<a<0$)



occorre capire $f(\hat{x})\gtrless-a$

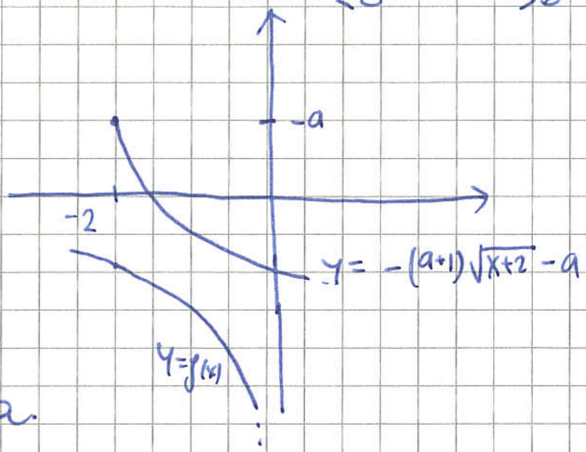
dall'eq.ne $f'=0$ per $-1<a<0$ si ha $\hat{x} = \frac{1-\sqrt{1+2(a+1)^2}}{(a+1)^2}\cdot 2 \in (-2,0)$

ma calcolare $f(\hat{x})$ è complicato.

Allora considero $f(x) = -a$ ove $\ln(ax) = \underbrace{-(a+1)}_{<0}\sqrt{x+2}\,\underbrace{-a}_{>0}$

$g(x) \doteq \ln(ax)$

$h(x) \doteq -(a+1)\sqrt{x+2} - a$



osservo: $g(-2) = \ln(-2a)$

con $0 < -2a < 2$

$\Rightarrow g(-2) < 0$ e $g \downarrow$

$\Rightarrow \nexists\, x_0$ t.c. $f(x_0) = -a$.

ES 4. $g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x>0 \\ \operatorname{tg} x + bx^2 - \ln(1+x) & -1<x\leq 0 \end{cases}$ $\qquad D = (-1;+\infty)$

a. $g \in C^0(D)$ in quanto $g|_{x>0}$, $g|_{x\leq 0}$ è composizione di funzioni elementari continue nel dominio e $\lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$.

inoltre $g \in C^1$ per $x>0$ e per $x<0$ e vale $g'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & x>0 \\ \frac{1}{\cos^2 x} + 2bx - \frac{1}{1+x} & -1<x<0 \end{cases}$

(essendo composizione di funzioni C^1 nel loro dominio)

valuto $g'(0)$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{h}} - 0}{h} = 0$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\operatorname{tg} h + bh^2 - \ln(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\operatorname{tg} h}{h} + bh - \frac{\ln(1+h)}{h} = 1+0-1 = 0.$$

$\Rightarrow g$ è derivabile in $x=0$ e vale $g'(0)=0$

inoltre $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} g'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = 0 \\ \lim_{x\to 0^-} g'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\cos^2 x} + 2bx - \frac{1}{1+x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g \in C^1(D).$

b. $g \in C^2$ per $x>0$ e $x<0$ analog. a prima. Verifico la derivabilità in $x=0$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{g'(h)-g'(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{1}{h^2} e^{-\frac{1}{h}} - 0\right)\frac{1}{h} = 0$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{g'(h)-g'(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \left(\frac{1}{\cos^2 h} + 2bh - \frac{1}{1+h}\right)\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1 + \frac{\sin^2 h}{h} + 2b\cos^2 h}{(1+h)\cos^2 h} = 1+2b$$

$\Rightarrow g'$ derivabile in D sse $1+2b=0$ cioè $b=-1/2$.

(cioè g 2 volte derivabile)