COMPITO SCRITTO di **ANALISI MATEMATICA I**,
CdS in Fisica e Astrofisica, 18 gennaio 2019

Esercizio 1. Determinare il dominio e gli eventuali asintoti della funzione

$$F(x) = \int_2^x t\, \mathrm{e}^{-(\ln t)^k}\, dt,$$

al variare di $k \in \mathbb{N}$.

N.B. Studiare anche se $x=0$ appartiene o meno al DOMINIO di F!

Esercizio 2. Si consideri la successione

$$a_n = \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right).$$

(a) Studiare il segno di a_n.
(b) Stabilire se esiste una relazione tra a_{2k} e a_{2k+1}.
(c) Analizzare il comportamento della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.
(d) Dedurre dal punto (c) l'andamento della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt[3]{a_n}$.

RICORDARSI che in generale <u>NON</u> si può dire:
$\sum_1 a_k \cancel{=} \sum_1 a_{2k} + \sum a_{2k+1}$
(es. $\underbrace{\sum_1 (-1)^{2k} + (-1)^{2k+1}}_{=0!} \neq \underbrace{\sum_1 (-1)^{2k}}_{\text{non conv}} + \underbrace{\sum_1 (-1)^{2k+1}}_{\text{non conv}}$!

Esercizio 3. Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'andamento della funzione

$$f(x) = \left(1 + \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{x^3} - \frac{1}{\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{2x^\alpha}},$$

per x che tende a $+\infty$.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che esiste $a \in \mathbb{R}$ per cui

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a.$$

Dimostrare che

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} f(t)\, dt = a.$$

Trovare un controesempio che mostri che non vale il viceversa.

(suggerimento: si pensi a funzioni per cui non esiste il limite a più infinito ma l'integrale ha valore costante su intervalli $[x, x+1]$).

es 1

$$F(x) = \int_2^x t\, e^{-(\ln t)^k}\, dt \qquad k \in \mathbb{N}$$

. D_f funzione integranda $\underset{\uparrow k>0}{=} \{t>0\} = (0,+\infty)$
$\underset{\uparrow k=0}{=} \mathbb{R}$

. $f(x) \doteq t e^{-(\ln t)^k}$ è integrabile su: ogni $[a,b] \subseteq D$.

. considero $k \neq 0$. valuto l'integrabilità per $x=0$

$$\int_0^1 t\, e^{-(\ln t)^k} dt \qquad \text{per } t\in(0,1) \text{ si ha } \ln t<0$$

k pari allora $t\, \underbrace{e^{-(\ln t)^k}}_{\to 0} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ e quindi f limitata in $(0,1)$ e integrabile ✓

k dispari allora $t\, \underbrace{e^{-(\ln t)^k}}_{\to +\infty} \longrightarrow +\infty$ inoltre

$$\int_0^1 t\, e^{-(\ln t)^k} dt \underset{\substack{\uparrow \\ \ln t = u \\ t = e^u}}{=} \int_{-\infty}^0 e^{-(u^k)+2u} du$$

studio $(-u)^k + 2u$ per $u \to -\infty$, k disp

. $k=1$ $\quad -u^k + 2u = u$
e $\int_{-\infty}^0 e^u\, du$ integrabile ✓

• $k \geq 3$, k dispari allora $-u^k + 2u > |u| = -u$
cioè $-u^k > -3u$ per $u < -M$

e quindi $\int_{-\infty}^{-M} e^{-u^k + 2u}\, du$ non è integrabile ✓

• $k=0$ $\quad \int_2^0 t\, dt = -2$ integrabile

$\Rightarrow$ k pari: $[0,b] \subseteq D_F \quad \forall b>0$

k Dispari: $k=1 \quad [0,b] \subseteq D_F$

$k \geq 3 \quad 0 \notin D_F$

osservo che ogni $x<0 \notin D_F$ in quanto i $t<0$ non sono in D_f

Quindi $D_F = \begin{cases} [0,+\infty) & \text{per k pari e } k=1 \\ (0,+\infty) & \text{per k dispari } k \geq 3. \end{cases}$

Valuto $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ cioè l'integrabilità di $f(x)$ per $x \to +\infty$

si ha $\lim_{t\to+\infty} e^{-(\ln t)^k} = 0 \quad \forall k \neq 0$

e in particolare $t\, e^{-(\ln t)^k} \longrightarrow 0 \quad \forall k \neq 0$

Osservo invece che per $k=0$ $\quad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} F(x) \underset{k=0}{=} +\infty$ ✓

sia $k\neq 0$ quindi $k\geq 1$

se $k=1$ $\quad f(t) = t\, e^{-\ln t} = 1$ non integrabile in $[1,+\infty)$

$\Rightarrow$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x) \underset{k=1}{=} +\infty$ ✓

se $k\geq 3$ $\quad f(t) = t\, e^{-(\ln t)^k} \leq t\, e^{-\ln t^3} = \frac{1}{t^2}$ integrabile in $[1,+\infty)$

$(\ln t)^k \geq (\ln t)^3 \underset{t\to+\infty}{\geq} 3\ln t = \ln t^3$

e quindi $\lim_{x\to+\infty} F(x) \underset{k\geq 3}{=} L$ finito ✓

se $k=2$ $\quad f(t) = t\, e^{-(\ln t)^2} = t\left(e^{-\ln t}\right)^{\ln t} = t\left(\frac{1}{t^{\ln t}}\right) =$

$= \frac{1}{t^{\ln t - 1}} < \frac{1}{t^2}$ integrabile a $+\infty$

essendo $\ln t - 1 \geq 2$ per $t\to+\infty$

e quindi $\lim_{x\to+\infty} F(x) \underset{k=2}{=} L'$ finito ✓

Resta da capire se $F(x)$ presenta AS. OBLIQUI per $k=0,1$.

$k=1$ Calcolo $F(x) = \int_2^x t\, e^{-\ln t}\, dt =$

$= \int_2^x t\,\frac{1}{t}\, dt = (x-2)$ è una retta

La retta $y = x-2$ è AS. OBL per $x\to+\infty$ per $F(x)$ con $k=1$

se $k=0$ $\quad F(x) = \int_2^x t\, e^{-1}\, dt = \frac{1}{2e}(x^2-4)$ è una parabola e non presenta AS. OBL.

$\Rightarrow$ $F(x)$ presenta AS. ORIZZ per $x\to+\infty$ se $k\geq 2$

è una retta (e quindi AS. OBL. di se stessa) per $k=1$

è una parabola (e quindi non ha AS. OBL.) per $k=0$.

es2 $a_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ NOTA. a_n definita $\forall n \geq 2$

(a) oss: $\ln(1+x) \begin{matrix} \geq 0 \\ <0 \end{matrix}$ $\begin{matrix} \text{sse } x>0 \\ \text{sse } x<0 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ $a_n \begin{matrix} >0 \\ <0 \end{matrix}$ $\begin{matrix} \text{per } n \text{ pari} \\ \text{per } n \text{ dispari} \end{matrix}$

$\Rightarrow$ a_n è succ. a segni alterni $a_n = (-1)^n b_n$ con $b_n \geq 0$ (DA DETERMINARE)

(b) $a_{2k} = \ln\left(1+\frac{1}{2k}\right) = \ln\left(\frac{2k+1}{2k}\right)$ $\forall k \geq 1$

$a_{2k+1} = \ln\left(1-\frac{1}{2k+1}\right) = \ln\left(\frac{2k}{2k+1}\right) = -\ln\left(\frac{2k+1}{2k}\right) = -a_{2k}$.

(c) osservo: $\lim_n a_n = 0$ con $a_{2k} \searrow 0$ e $a_{2k+1} \nearrow 0$

considero $N \in \mathbb{N}$ $N \geq 2$ $S_N = \sum_{n=2}^{N} a_n = \begin{cases} a_N & \text{se } N \text{ pari} \\ 0 & \text{se } N \text{ dispari (da (b))} \end{cases}$

da cui:

$\lim_{N\to+\infty} S_N = 0$ cioè $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n$ converge

OPPURE $a_n = (-1)^n b_n$ con $b_n = \begin{cases} \ln\left(1+\frac{1}{2k}\right) & \text{se } n=2k \text{ e se } n=2k+1 \end{cases}$

$a_n \to 0$, $b_n \geq 0$

$b_n \searrow 0$ essendo $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ funzione decrescente

$\Rightarrow$ per Leibniz la serie $\sum (-1)^n b_n$ converge.

(d) $c_n \doteq \sqrt[3]{a_n} = (-1)^n \sqrt[3]{b_n}$. con $b_n \geq 0$

$b_n \searrow 0 \Rightarrow \sqrt[3]{b_n} \searrow 0 \Rightarrow$ la serie $\sum \sqrt[3]{a_n}$ converge.

es3 $g(t) = (1+\sin t^2)^{\frac{1}{t^3}} - (\cos t)^{-2/t^\alpha}$ per $t \to 0^+$

$$a(t) = (1+\sin t^2)^{\frac{1}{t^3}} = e^{\frac{1}{t^3}\ln(1+\sin t^2)} =$$

$$= \exp\left(\frac{1}{t} - \frac{t}{2} + o(t^2)\right) = \exp\left(\frac{1}{t} - \frac{t}{2}\overbrace{\left(1+\frac{o(t^2)}{t}\right)}^{=-A\cdot 2}\right) =$$

$$= \exp\left(\frac{1}{t} + At\right)$$

$A = -\frac{1}{2}(1+o(t^2))$

$$b(t) = (\cos t)^{-2/t^\alpha} = e^{-\frac{1}{t^\alpha}\ln(1-\sin^2 t)} =$$

$$= \exp\left(\frac{1}{t^\alpha}\left(t^2 + \frac{1}{6}t^4\left(1+\frac{o(t^4)}{t^4}\right)\right)\right) = \exp\left(t^{2-\alpha} + Bt^{4-\alpha}\right)$$

$B = \frac{1}{6}\left(1+\frac{o(t^4)}{t^4}\right) > 0$ asintoticamente

ora: $\lim_{t\to 0^+} a(t) = +\infty$

$$\lim_{t\to 0^+} b(t) = \begin{cases} e & \text{se } \alpha = 2 \\ 1 & \text{se } \alpha < 2 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 2 \end{cases} \Rightarrow \text{se } \alpha \le 2 \text{ si ha } \lim_{t\to 0^+} a(t) - b(t) = +\infty$$

considero $\alpha > 2$

$$a(t) - b(t) = \underbrace{e^{\frac{1}{t}}}_{\to +\infty}\Big(\underbrace{e^{+At}}_{\to 1} - \underbrace{e^{t^{2-\alpha} - \frac{1}{t} + Bt^{4-\alpha}}}_{\to ?}\Big)$$

(sia $\alpha \neq 3$) $t^{2-\alpha} - \frac{1}{t} + Bt^{4-\alpha} = \frac{t^{3-\alpha}(1+Bt^2) - 1}{t} \xrightarrow{t\to 0^+}$ se $3-\alpha > 0$, $-\infty$

se $3-\alpha < 0 \to +\infty$

$\Rightarrow a(t) - b(t) \longrightarrow +\infty$ se $2 < \alpha < 3$

$-\infty$ se $\alpha > 3$

Sia $\alpha = 3$ allora

$A - B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{o(t^4)}{t^4} + o(t)$

$$a(t) - b(t) = e^{\frac{1}{t} + At} - e^{\frac{1}{t} + Bt} = e^{\frac{1}{t} + Bt}\left(e^{(A-B)t} - 1\right) =$$

$$= \underbrace{e^{\frac{1}{t} + Bt}}_{\to +\infty} \underbrace{\frac{e^{(A-B)t} - 1}{(A-B)t}}_{\to 1} \cdot \underbrace{(A-B)}_{\to (-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}) < 0} \underbrace{t}_{\to 0} \longrightarrow -\infty$$

es4 $f \in C^0(\mathbb{R})$ quindi per il teo della media

$$\int_x^{x+1} f(t)\,dt = (x+1-x)\cdot f(\xi) = \quad \text{con } x < \xi < x+1$$
$$= f(\xi)$$

da cui $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} f(\xi) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x\to+\infty} x < \lim_{x\to+\infty} \xi < \lim_{x\to+\infty} x+1$$

Cerco adesso f t.c. $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,dt = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ ma $\nexists \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$

es: $f(x) = \sin(2\pi x)$ allora f è 1-periodica

quindi $\nexists \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,dt$ è costante $\forall x \in \mathbb{R}$

(in particolare $=0$ per simmetria