COMPITO SCRITTO di **ANALISI MATEMATICA I**,
CdS in Fisica e Astrofisica, 4 febbraio 2019

Esercizio 1. Si consideri $f(x) : [\frac{1}{2}; \frac{8}{3}] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{(\cos^2 x - 2)\sin^2 x}.$$

Al variare di $a \in \mathbb{R}$, descrivere tutte le primitive $F(x)$ della funzione $f(x)$ tali che $F(\frac{\pi}{2}) = a$.

Esercizio 2. Si consideri la successione

$$a_n = \left(1 - \frac{2k}{n} - \cos\left(\frac{2}{n^k}\right)\right).$$

(a) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{N}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.
(b) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{N}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ converge.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua su tutta la retta reale, tale che:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L; \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty,$$

dove $L \in \mathbb{R}$.

(a) Discutere al variare di $L \in \mathbb{R}$ se $f(x)$ ammette un punto fisso. In caso affermativo provarlo, altrimenti mostrare dei controesempi.

(b) Discutere al variare di $L \in \mathbb{R}$ se $g(x)$ ammette un punto fisso, se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua su tutta la retta reale, tale che:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = L.$$

In caso affermativo provarlo, altrimenti mostrare dei controesempi.

Esercizio 4. Calcolare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il valore del seguente limite:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\displaystyle\int_0^{x^3} (\mathsf{e}^{\cos t} - \mathsf{e}) \ln\left(\frac{t+3}{t^2+1}\right) dt}{\left|\left(\frac{x}{4}\sin(2x) + \cos x - 1\right)\right|^{\alpha}}.$$

ES1.

$f(x): \left[\frac{1}{2}; \frac{8}{3}\right] \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{(\cos^2 x - 2)\sin^2 x}$

$$F(x) \doteq \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)\,dt + a. \qquad f \in C^0\left(\left[\tfrac{1}{2}; \tfrac{8}{3}\right]\right)$$

allora per il teo fond. del calcolo integrale $\forall x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{8}{3}\right)$

$F'(x) = f(x)$ cioè $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ in $\left[\frac{1}{2}; \frac{8}{3}\right]$ e si ha $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$.

esplicitiamo F:

sia $x < \frac{\pi}{2}$

$$-a + F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{2\cancel{\sin t}\cos t}{-(1+\sin^2 t)\sin^{\cancel{2}} t}\,dt \underset{\uparrow}{=} \qquad \sin t = \tau \qquad t \in \left(x; \tfrac{\pi}{2}\right) \subseteq \left(0; \tfrac{\pi}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ sostituz. ammissibile

$t = \arcsin \tau$

$dt = \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau$

$\cos t = \sqrt{1-\tau^2}$

$$= \int_1^{\sin x} \frac{-2}{(1+\tau^2)\tau}\,d\tau =$$

$$= \int_1^{\sin x} \frac{2\tau}{1+\tau^2} - \frac{2}{\tau}\,d\tau = \ln|1+\tau^2| - 2\ln|\tau| \Big|_1^{\sin x} = \ln\left(\frac{1+\tau^2}{\tau^2}\right)\Big|_1^{\sin x} =$$

$$= \ln\left(\frac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x}\right) - \ln(2) \Rightarrow \forall x \in \left[\tfrac{1}{2}; \tfrac{\pi}{2}\right] \quad \boxed{F(x) = \ln\left(\frac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x}\right) - \ln(2) + a.}$$

sia $\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{8}{3}$

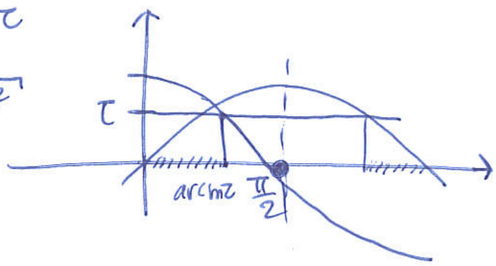
$$-a + F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{-2\cos t}{(1+\sin^2 t)\sin t}\,dt =$$

$\sin t = \tau \qquad t \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow$ sostituz. ammissibile

$t = \pi - \arcsin \tau$

$dt = -\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau$

$\cos t = -\sqrt{1-\tau^2}$



$$= \int_1^{\sin x} \frac{-2}{(1+\tau^2)\tau}\,d\tau = \ln\left(\frac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x}\right) - \ln(2)$$

$$\Rightarrow \forall x \in \left[\tfrac{1}{2}; \tfrac{8}{3}\right] \quad F(x) = \ln\left(\frac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x}\right) - \ln(2) + a.$$

ES2.

ⓐ $a_n = 1 - \frac{2K}{n} - \cos\left(\frac{2}{n^K}\right) = 1-\cos\left(\frac{2}{n^K}\right) - \frac{2K}{n} =$

$$= \left(\frac{2}{n^K}\right)^2 \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{n^{2K+1}}\right) - \frac{2K}{n} =$$

$$= \frac{2}{n^{2K}} - \frac{2K}{n} + o\left(\frac{1}{n^{2K+1}}\right)$$

- $K \geq 1$ quindi $a_n = -\frac{2K}{n}\left(1 - \frac{2}{n^{2K-1}} + o\left(\frac{1}{n^{2K}}\right)\right)$

Poichè $\lim_n \left(1 - \frac{2}{n^{2K-1}} + o\left(\frac{1}{n^{2K}}\right)\right) = 1$

per la permanenza del segno si ha $a_n < 0$ $\forall n$ suff. grande

diciamo $n \geq N_0$.

quindi $a_n < 0$ $\forall n \geq N_0$.

- $b_n = -a_n$. allora b_n definitivamente ≥ 0

$$b_n \cdot n = 2K\Big(1 - \underbrace{\frac{1-\cos(2/n^K)}{2/n^K}}_{\substack{\to 0 \\ \forall K \geq 1}} \cdot \frac{1}{K} \underbrace{\frac{1}{n^{K-1}}}_{\substack{\to 0 \ (K>1) \\ = 1 \ (\text{se } K=1)}}\Big) \longrightarrow 2K \ (\neq 0)$$

quindi l'andamento di $\sum b_n$ è lo stesso di $\sum \frac{1}{n}$ $\Longrightarrow \sum a_n$ diverge $\forall K \geq 1$.

ⓑ $f(x) \doteq -1 + 2Kx + \cos(2x^K) \Longrightarrow a_n = -f\left(\frac{1}{n}\right)$

con $f\left(\frac{1}{n}\right) \geq 0$ $\forall n \geq N_0$

$$f'(x) = +2K - \sin(2x^K) \cdot 2K x^{K-1} =$$
$$= 2K\left(1 - \frac{\sin(2x^K)}{2x^K} \cdot 2x^{2K-1}\right)$$

siamo interessati a studiare f vicino a $x = 0^+$.

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 2K > 0$ $\forall K \geq 1$ quindi $f\left(\frac{1}{n}\right) \downarrow$ rispetto a n $\forall K \geq 1$

allora $\sum (-1)^n a_n = -\sum (-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$

Posso applicare il criterio di Leib. alla serie $\sum (-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$

Poichè $(-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$ è a segni alterni e $f\left(\frac{1}{n}\right) \geq 0$ (definitivamente)

$\Longrightarrow$ essendo $f\left(\frac{1}{n}\right) \geq 0$, $f\left(\frac{1}{n}\right) \downarrow 0$ si ha $\sum (-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$ converge $\forall K \geq 1$.

ES 3.

(a). $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\in C^0(\mathbb{R})$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ $(L\in\mathbb{R})$

. $\hat{f}(x) \doteq f(x) - x$. $\hat{f}\in C^0(\mathbb{R})$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \hat{f}(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \hat{f}(x) = +\infty\end{array}\right\}$ dal teo di $\exists$ degli zeri $\exists\, x_0\in\mathbb{R}$ t.c. $\hat{f}(x_0) = 0$ cioè t.c. $f(x_0) = x_0$ cioè $\forall L\in\mathbb{R}$ f ha un punto fisso.

(b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g\in C^0(\mathbb{R})$: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L$

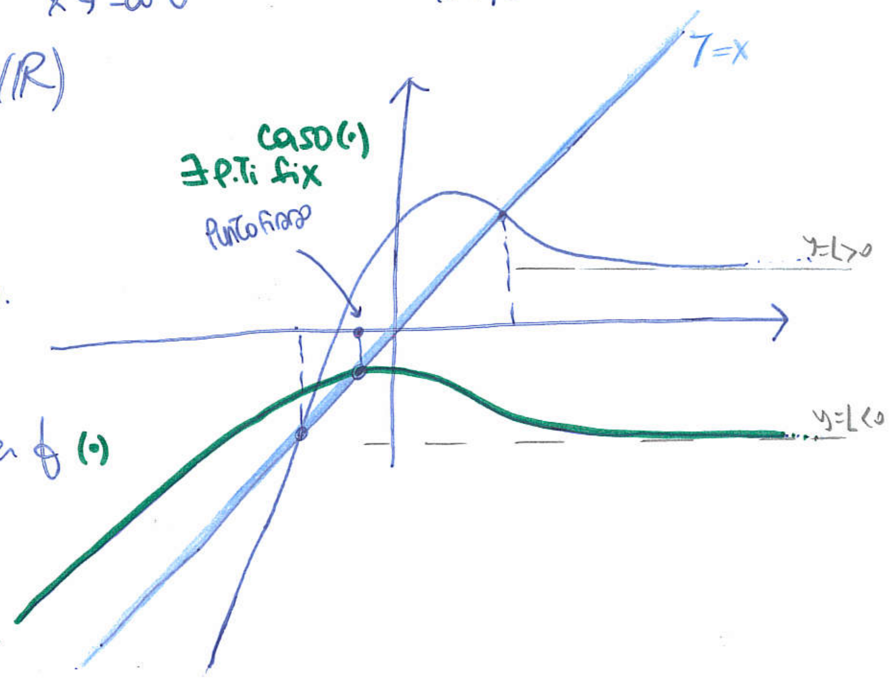
. $\hat{g}(x) \doteq g(x) - x$. $\hat{g}\in C^0(\mathbb{R})$

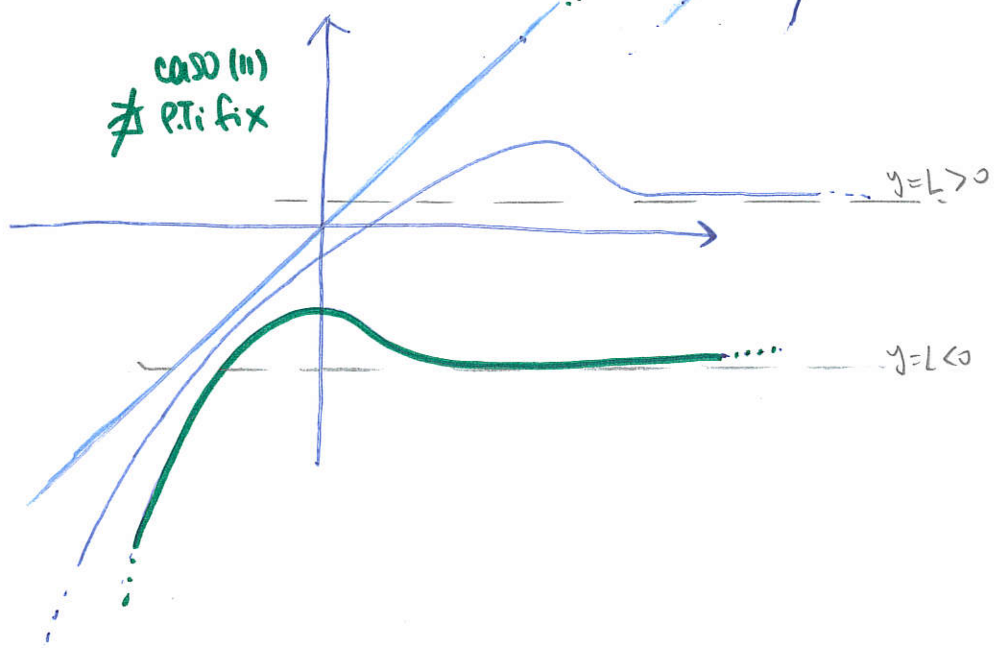
$\lim\limits_{x\to+\infty} \hat{g}(x) = -\infty$ $\forall L\in\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \hat{g}(x)$ dipende da $g(x)$.

Potrebbero: $\exists$ punti fissi per f (I)

oppure $\nexists$ punti fissi (II)





$\underline{\text{ES.4.}}$ $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^3} (e^{\cos t} - e) \ln\left((t+3)/(t^2+1)\right) dt}{\left|\frac{x}{4}\sin(2x)+\cos x - 1\right|^\alpha} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Studio il numeratore

$$e\int_0^{x^3} (e^{\cos t -1} - 1) \underbrace{\ln\left(\frac{t+3}{t^2+1}\right)}_{\doteq g(t)} dt = e\int_0^{x^3} g(t)\left(\frac{t^2}{2}+o(t^3)\right) dt =$$

con $g(t) \underset{t\to 0}{=} \Theta(\ln 3)$

$$= e\left(\int_0^{x^3} \underbrace{g(t)\frac{t^2}{2}}_{\text{è } \Theta(\ln 3)} dt + \int_0^{x^3} g(t)\, o(t^3)\, dt\right) = e\left(\Theta(\ln 3)\frac{t^3}{6}\Big|_0^{x^3} + o(t^4)\Big|_{t=x^3}\right) =$$

sappiamo: $g(t) \in C^0$

$e^{\cos t -1} - 1 \in C^0 \Rightarrow e^{\cos t -1} - 1 = \frac{t^2}{2} + o(t^3) \in C^0$

$\Rightarrow o(t^3) \in C^0$

Abbiamo dim in classe che se $h(t) \in C^0$ allora: se h è $o(x^k)$, $\int_0^x h(t)\,dt$ è $o(x^{k+1})$

lo applico a $h(t) = g(t)\cdot o(t^3) = o(t^3)$

$$= e\left(\Theta(\ln 3)\frac{x^9}{6} + o(x^{12})\right)$$

Studio il denominatore

$$\left|\frac{x}{4}\sin(2x)+\cos x - 1\right|^\alpha = \left|\frac{x}{4}\left(2x - x^3\frac{8}{6} + o(x^4)\right) - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right|^\alpha =$$

$$= \left|\frac{x^2}{2} - x^4\frac{4}{3} + o(x^5) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right|^\alpha = \left|\left(\frac{1}{24}-\frac{4}{3}\right)x^4 + o(x^5)\right|^\alpha =$$

$$= \left(\frac{31}{24}x^4 + o(x^5)\right)^\alpha$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{\text{num}}{\text{den}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e\left(\Theta(\ln 3)\frac{x^9}{6} + o(x^{12})\right)}{\underbrace{\left|\frac{31}{24}x^4 + o(x^5)\right|^\alpha}_{=\left(\frac{31}{24}x^4\right)^\alpha (1+o(x))^\alpha}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e\,\Theta(\ln 3)}{6}\,\frac{x^9 + o(x^{12})}{\left(\frac{31}{24}x^4\right)^\alpha (1+o(x))^\alpha}$$

$(1+o(x))^\alpha \to 1 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e\,\Theta(\ln 3)}{6\left(\frac{31}{24}\right)^\alpha}\, x^{9-4\alpha}\,\frac{(1+o(x^3))}{(1+o(x))^\alpha} = \begin{cases} 9-4\alpha = 0 & \frac{e\ln 3}{6}\left(\frac{24}{31}\right)^{\frac{9}{4}} \\ 9-4\alpha < 0 & +\infty \\ 9-4\alpha > 0 & 0 \end{cases}$$