COMPITO SCRITTO di **ANALISI MATEMATICA I**,
CdS in Fisica e Astrofisica, 17 aprile 2019

Esercizio 1. Trovare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui vale

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha - \cos^3 n}{\sqrt{2} + \sin(\sin n)} = +\infty,$$

e provarlo con la definizione.

Esercizio 2. Calcolare il valore di $\cos(\frac{1}{5})$ con un errore minore di 10^{-6}

Esercizio 3. Per $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione

$$f(x) = \mathsf{e}^{|(x-a)(x^2-\sqrt{8}x+2)|}.$$

(a) Determinare il dominio massimale di f, D.

(b) Analizzare la continuità e la derivabilità di f in D.

(c) Calcolare sup e inf di $f(x)$ per $x > 0$, per $a > \sqrt{2}$; specificare se si tratta di massimo e/o minimo. (STUDIARE LA FUNZIONE $f(x)$)

(d)* [Facoltativo] Trovare tutte le soluzioni di $f(x) = \ln(2)$ per $x \in D$ e $a > \sqrt{2}$.

Esercizio 4. Si calcoli il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2\sinh^3 x + 5\sinh^2 x + 8\sinh x - 7}{\cosh x\Big(\sinh^2 x + 2\sinh x - 3\Big)}\, dx.$$

es1. $\lim_n \frac{n^\alpha - \cos^3 n}{\sqrt{2} + \sin(\sin n)} = +\infty$ sse $\alpha > 0$

• verifica. fix $M>0$ considero $a_n = \frac{n^\alpha - \cos^3 n}{\sqrt{2} + \sin(\sin n)}$ oss: $a_n > 0$ $\forall n$ suff grande

vogliamo dim che $\exists n_0$ t.c. se $n > n_0$ allora $a_n > M$.

oss: $(\cos n)^3 \in [0,1]$
$\sin(\sin(n)) \in [-\sin 1; \sin 1] \subseteq [-1,1]$

quindi $\frac{n^\alpha - \overbrace{\cos^3 n}^{<1}}{\sqrt{2} + \underbrace{\sin(\sin n)}_{<1}} > \frac{n^\alpha - 1}{\sqrt{2}+1}$

Mi chiedo per quali n si ha $\frac{n^\alpha - 1}{\sqrt{2}+1} > M$. vale sse $n^\alpha - 1 > M(1+\sqrt{2})$

sse $n^\alpha > 1 + M(1+\sqrt{2})$ sse $n > (1+M(1+\sqrt{2}))^{\frac{1}{\alpha}}$. ☒

es3. $f(x) = e^{|(x-a)(x^2 - \sqrt{8}x + 2)|} = e^{|(x-a)(x-\sqrt{2})^2|}$

(a) $D_f = \mathbb{R}$ $\forall a \in \mathbb{R}$

(b) • f è continua in $\mathbb{R}$ poiché composizione di funzioni continue in $\mathbb{R}$: exp; valore assoluto e polinomi.

• inoltre $\exp(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$; Polinomi$(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$; $|\xi| \in C^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\})$

quindi $f \in C^1(D_0)$ dove $D_0 = \{x \in \mathbb{R} : (x-a)(x-\sqrt{2})^2 \neq 0\}$

cioè $D_0 = \{x \in \mathbb{R} : x \neq a, x \neq \sqrt{2}\}$

considero $x = a$ per stabilire se f è derivabile in $x=a$

• $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{|h|(a+h-\sqrt{2})^2} - 1}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{e^{|h|(a+h-\sqrt{2})^2} - 1}{|h|(a+h-\sqrt{2})^2}}_{\to 1} \cdot \frac{|h|}{h} \underbrace{(a+h-\sqrt{2})}_{\to a-\sqrt{2}}$ il $\cancel{\lim}$ $\cancel{\exists}$

NON AMMETTE LIM.!

cioè f NON DERIVABILE per $x=a$

considero $x = \sqrt{2}$

• $\lim_{h\to 0} \frac{f(\sqrt{2}+h) - f(\sqrt{2})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{|h+\sqrt{2}-a|h^2} - 1}{h} = 0$

quindi f è Derivabile per $x=\sqrt{2}$. (2)

(c) considero
$$f'(x) = \begin{cases} e^{|(x-a)(x-\sqrt{2})^2|} \cdot \left(3x^2 - 2x(a+2\sqrt{2}) + 2(1+\sqrt{2}a)\right) \cdot \operatorname{sgn}(x-a) & (\text{se } x \neq a \wedge x \neq \sqrt{2}) \\ 0 & \text{se } x = \sqrt{2} \\ \nexists & \text{se } x = a \end{cases}$$

quindi $f' = 0$ sse $x = \sqrt{2}$ oppure
$$3x^2 - 2x(a+2\sqrt{2}) + 2(1+\sqrt{2}a) = 0 \quad \text{con } x \neq a \wedge x \neq \sqrt{2}$$

considero $\frac{\Delta}{4} = (a+2\sqrt{2})^2 - 6(1+\sqrt{2}a) = (a-\sqrt{2})^2$

da cui vale $=0$ sse $x_{1,2} = \dfrac{a+2\sqrt{2} \pm |a-\sqrt{2}|}{3}$

$\Rightarrow$ se $a \neq \sqrt{2}$ $\exists!$ radice $x_{1,2} = \dfrac{a+2\sqrt{2} \pm (a-\sqrt{2})}{3}$ $\left(\begin{array}{l} \frac{2a+\sqrt{2}}{3} \\ \sqrt{2} \leftarrow \text{NON ACC.} \end{array} \right)$

se $a = \sqrt{2}$ allora si ha solo $x = \sqrt{2}$.

segno di f':

caso $a > \sqrt{2}$

		$\sqrt{2}$		$\frac{2a+\sqrt{2}}{3}$		a	
$(3x^2-2x(a+2\sqrt{2})+2(1+\sqrt{2}a))$	+	×	−	0	+		+
$\operatorname{sgn}(x-a)$	−		−		−	×	+
	−	×	+	0	−	×	+
	↘		↗		↘		↗

caso $a < \sqrt{2}$

	a		$\frac{2a+\sqrt{2}}{3}$		$\sqrt{2}$	
+		+	0	−	×	+
−	×	+		+		+
−	×	+	0	−	×	+
↘		↗		↘		↗

$\Rightarrow$ (caso $a > \sqrt{2}$) in $\left.\begin{array}{l} x=\sqrt{2} \\ \text{e } x = a \end{array}\right\}$ si ha min loc

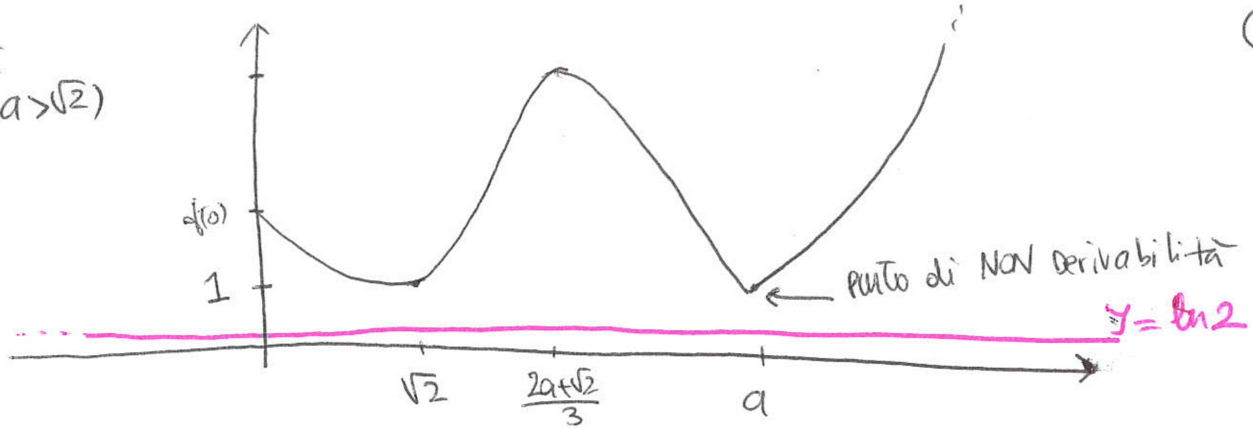
in $x = \frac{2a+\sqrt{2}}{3}$ si ha max loc ma essendo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ \forall a$

si ha $\sup f = +\infty$.

$\inf f = \min f = \min\{\overset{''1}{f(\sqrt{2})}; \overset{''1}{f(a)}\} = 1$

(caso $a < \sqrt{2}$ analogo ...)

quindi (caso $a > \sqrt{2}$)



<u>OSS</u>: abbiamo qui fatto lo studio di funzione. Tuttavia, per cercare solo $\sup f$ e $\inf f$ è sufficiente osservare che: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \sup f = +\infty$, $\nexists$ MAX ASS.

inoltre $|(x-a)(x^2-\sqrt{8}x+2)| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ da cui $e^{|(x-a)(x^2-\sqrt{8}x+2)|} \geq 1$

e si ha $f(\sqrt{2}) = f(a) = 1 \Rightarrow \inf f = \min f = 1$ assunto in $x = \sqrt{2} \vee x = a$.

(d) Poiché $\ln 2 < 1$ e dal punto (c) $\min f = 1$, si ha che $\nexists$ intersezioni tra $y(x) = f(x)$ e $y(x) = \ln 2$ cioè $\nexists$ soluzioni all'eqne $f(x) = \ln 2$.

<u>es 4</u>. si consideri la sostituzione $\sinh x = t$ (ammissibile $\forall x \in \mathbb{R}$) da cui $\cosh x \, dx = dt$ (da cui, se vogliamo, $dx = \frac{dt}{\cosh x(t)}$ che $\exists$ poiché la sostituzione è invertibile)

NOTA: questo passaggio NON è indispensabile!

infatti
$$f(x) = \frac{2\sinh^3 x + 5\sinh^2 x + 8\sinh x - 7}{\cosh x\,(\sinh^2 x + 2\sinh x - 3)} = \frac{2\sinh^3 x + 5\sinh^2 x + 8\sinh x - 7}{\underbrace{\cosh^2 x}_{=1+\sinh^2 x}\,(\sinh^2 x + 2\sinh x - 3)} \cdot \cosh x$$

e quindi
$$\int_0^{1/2} f(x)\,dx = \int_0^{1/2} \frac{2\sinh^3 x + 5\sinh^2 x + 8\sinh x - 7}{(1+\sinh^2 x)(\sinh x - 1)(\sinh x + 3)} \cosh x\,dx \underset{\substack{\sinh x = t \\ \cosh x\,dx = dt}}{=}$$

$$= \int_0^{\sinh(1/2)} \frac{2t^3 + 5t^2 + 8t - 7}{(1+t^2)(t-1)(t+3)}\,dt = \int_0^{\sinh(1/2)} \frac{3}{1+t^2} + \frac{2t+2}{t^2+2t-3}\,dt =$$

$$= 3\arctan(t) + \ln|t^2+2t-3| \Big|_0^{\sinh(1/2)} = \ldots$$

es 2. Calcolare $\cos(\frac{1}{5})$

dallo sviluppo in serie di taylor si ha $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + R_5(x)$

nota: poiché $(\cos x)^{(V)}\Big|_{x_0=0} = 0$ nella formula del polinomio si può utilizzare il resto nella forma di Lagrange all'ordine 5!

da cui

$$\cos\left(\frac{1}{5}\right) = 1 - \frac{1}{2\cdot 5^2} + \frac{1}{4!\,5^4} + R_5\left(\frac{1}{5}\right)$$

con $\left|R_5\left(\frac{1}{5}\right)\right| = \frac{\cos^{(6)}(\xi)}{6!}\left|\frac{1}{5}\right|^6 \quad \exists\, \xi \in \left(0, \frac{1}{5}\right)$

da cui $\left|R_5\left(\frac{1}{5}\right)\right| \leq \frac{1}{6!}\frac{1}{5^6} < 10^{-6}$.