Integrazione indefinita di funzioni irrazionali

Denotiamo con $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una funzione razionale delle variabili indicate. Passiamo in rassegna alcuni tipi di integrali la cui funzione integranda può essere razinalizzata mediante particolari sostituzioni.

a) ***Integrali del tipo***

$$\int R(x^{r_1}, x^{r_2}, \ldots, x^{r_n})\ \mathrm{d}x$$

dove $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sono dei numeri razionali che supporremo ridotti ai minimi termini.

Detto μ il minimo comune multiplo dei denominatori delle frazioni $r_1, r_2, \ldots, r_n$, mediante la sostituzione $x = t^\mu$ l'integrale considerato si trasforma in un integrale di una funzione razionale di t.

b) ***Integrali del tipo***

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right]\ \mathrm{d}x$$

dove a, b, c, d sono quattro costanti tali che $ad - bc \neq 0$ e $r_1, r_2, \ldots, r_n$ hanno il significato loro attribuito in a).

Mediante la sostituzione

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^\mu,$$

dove μ ha lo stesso significato che in a), l'integrale dato si trasforma in un integrale di una funzione razionale di t.

Come caso particolare si hanno gli integrali del tipo

$$\int R[x, (ax+b)^{r_1}, (ax+b)^{r_2}, \ldots, (ax+b)^{r_n}]\dot{d}x$$

Osserviamo che gli integrali di tipo a) sono un caso particolare di questo.

c) ***Integrali del tipo***

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\ \mathrm{d}x$$

dove a, b, c sono costanti.

Notiamo che:

- se è $a = 0$ l'integrale rientra in quelli di tipo b);
- se è $a > 0$ e $b^2 - 4ac = 0$, si ha un integrale di funzione razionale;
- escludiamo il caso $a < 0, b^2 - 4ac \leqslant 0$ in quanto la funzione R è complessa.

Denotiamo con α e β gli zeri, che supporremo per il momento reali, del trinomio $ax^2 + bx + c$. Si può scrivere, supposto $x \neq \alpha$,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = \sqrt{\frac{a(x-\alpha)^2(x-\beta)}{x-\alpha}} = |x-\alpha|\sqrt{\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}},$$

per cui l'integrale diviene

$$\int R\left(x, |x-\alpha|\sqrt{\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}\right) dx$$

e quindi rientra negli integrali di tipo b). Mediante la sostituzione

$$\sqrt{\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}} = t,$$

equivalente alla

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t, \tag{1}$$

l'integrale considerato si trasforma pertanto in un integrale di funzione razionale di t.

Se è $a > 0$ e gli zeri α e β sono complessi (di conseguenza è $c > 0$) in luogo della sostituzione (1), per evitare l'uso dell'immaginario, si può effettuare una delle sostituzioni

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t, \tag{2}$$
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c} \tag{3}$$

ciascuna delle quali permette di trasformare l'integrale dato in uno di funzione razionale.

Ricapitolando:

- se è $a > 0, c \geqslant 0$, α e β reali si può applicare indifferentemente una delle due sostituzioni (1), (2), (3);
- se è $a < 0, c \geqslant 0$ (e quindi α e β reali) si può applicare la (1) o la (3);
- se è $a > 0$ e gli zeri α, β complessi (e quindi $c > 0$) si può fare uso della sostituzione (2) o della (3);
- se è $a < 0, c < 0$ e α e β reali si effettua la sostituzione (1).

Pertanto, sempre che la funzione $R(x)$ sia reale, mediante un'ooportuna scelta della sostituzione si può effettuare il calcolo dell'integrale rimanendo nel campo reale.

Un integrale più generale di quello che abbiamo considerato è il seguente:

$$\int R[x, \sqrt{P(x)}]\ \mathrm{d}x$$

dove $P(x)$ è un polinomio di grado $\geqslant 3$. Si può dimostrare che questo integrale non è esprimibile in termini finiti mediante le funzioni elementari.

d) ***Integrali del tipo***

$$\int R\,(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}\ )\ \mathrm{d}x.$$

Mediante la sostituzione $\sqrt{ax+b} = t$ (oppure $\sqrt{cx+d} = t$) l'integrale considerato si riduce ad un integrale del tipo c).

e) ***Integrali del tipo***

$$\int x^q(a+bx^r)^s\ \ dx \qquad (q, r, s, a, b \text{ costanti reali}).$$

L'espressione $x^q(a+bx^r)^s$ dx è detta *differenziale binomio* e questi integrali sono detti *integrali di differenziale binomio.*

Notiamo che se uno dei numeri r, s, a, b è nullo il calcolo dell'integrale è immediato.

Supposto che i numeri q, r, s siano razionali, e che $r, s \neq 0$, risulta che l'integrale dato si può esprimere in termini finiti mediante le funzioni elementari se e solo se è intero almeno uno dei tre numeri

$$s, \qquad \frac{q+1}{r}, \qquad s + \frac{q+1}{r}.$$

- Se s è intero, l'integrale considerato rientra negli integrali del tipo a).
- Se è intero $(q+1)/r$, si effettua la sostituzione $a + bx^r = t^n$, $\qquad \big(s = \frac{m}{n}, n > 0\big)$;
- Se, infine, è intero $s + (q+1)/r$, si esegue la sostituzione $b + ax^{-r} = t^n$, $\qquad \big(s = \frac{m}{n}, n > 0\big)$.

Le sostituzioni indicate trasformano direttamente l'integrale di differenziale binomio in un integrale di funzione razionale[1].

Si possono eseguire, oltre a quelle indicate, altre sostituzioni:

- se $(q+1)/r$ è intero, si può porre $a + bx^r = t$, oppure $bx^r = at$;
- se è intero $s + (q+1)/r$ si può eseguire la sostituzione $b + ax^{-r} = t$ oppure $bx^r = at$.

Mediante esse l'integrale viene trasformato in un integrale ancora di funzione irrazionale ma di natura più semplice.

Agli integrali considerati si riconducono anche gli integrali della forma

$$\int (ax^\alpha + bx^\beta)^\gamma\ \mathrm{d}x \qquad (\alpha, \beta, \gamma, a, b \text{ costanti reali}, \alpha \neq \beta).^2$$

[1] Per questo motivo si dice anche che, nelle condizioni di cui sopra, il differenziale binomio $x^q(a+bx^r)^s$ dx è *razionalizzabile.*

[2] Se $\alpha = \beta$ il calcolo dell'integrale è immediato.

Infatti, si può scrivere

$$(ax^\alpha + bx^\beta)^\gamma = x^{\alpha\gamma}(a + bx^{\beta-\alpha})^\gamma.$$

OSSERVAZIONE

Se i numeri q, r, s, anziché razionali, sono reali qualunque, allora, affinché l'integrale considerato si possa calcolare in termini finiti, è necessario e sufficiente che uno almeno dei tre numeri

$$s, \quad \frac{q+1}{r}, \quad -\left(s + \frac{q+1}{r}\right)$$

sia intero e positivo.

Se s è intero e positivo l'integrale è esprimibile in termini finiti in quanto la funzione integranda è una somma di funzioni del tipo μx^ν, con μ e ν costanti. Se è intero e positivo $(q+1)/r$, allora si può eseguire la sostituzione $a + bx^r = t$, mentre se è intero e positivo $-\left(s + \frac{q+1}{r}\right)$ si può eseguire la sostituzione $b + ax^{-r} = t$.

1. Calcolare gli integrali:

$a)\ \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x;$ $\boxed{2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\log(\sqrt[6]{x}+1)+c}$

$b)\ \displaystyle\int \frac{1}{x^{5/4}-x}\,\mathrm{d}x;$ $\boxed{\log\frac{(\sqrt[4]{x}-1)^4}{x}+c}$

$c)\ \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^2}-1}\,\mathrm{d}x;$ $\boxed{\pm 2(\sqrt{\pm x}+\log|\sqrt{\pm x}-1|)+c \quad \text{se } x\geqslant 0,\ x\neq 1,\ \text{oppure se } x\leqslant 0,\ x\neq -1.}$

$d)\ \displaystyle\int \left(\frac{x}{1-x}\right)^{1/2}\mathrm{d}x;$ $\boxed{-\sqrt{x(1-x)}+\ \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}}+c}$

$e)\ \displaystyle\int \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,\mathrm{d}x$ (a costante non nulla); $\boxed{-2a\ \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\pm\sqrt{a^2-x^2}+c \text{ se } a\lesseqgtr 0}$

$f)\ \displaystyle\int \sqrt[5]{2x-1}\,\mathrm{d}x;$ $\boxed{\frac{5}{12}(2x-1)^{6/5}+c}$

$g)\ \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4x+3}}\,\mathrm{d}x;$ $\boxed{\frac{1}{24}(4x+3)^{3/2}-\frac{3}{8}(4x+3)^{1/2}+c}$

$h)\ \displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^2\left(\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}-2\right)}\,\mathrm{d}x;$ $-3\left[2\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{x}{x-1}\right)^2}+4\log\left|\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}-2\right|\right]+c$

$i)\ \displaystyle\int \frac{x+\sqrt[4]{x+10}}{\sqrt[3]{x+10}}\,\mathrm{d}x;$ $\boxed{\frac{3}{5}\sqrt[3]{(x+10)^5}-15\sqrt[3]{(x+10)^2}+\frac{12}{11}\sqrt[12]{(x+10)^{11}}+c}$

$j)\ \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}\,\mathrm{d}x;$ $\boxed{-\log|3+2\sqrt{x^2-3x+2}-2x|+c}$

$k)\ \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x$ (a costante non nulla); $\boxed{\log(x+\sqrt{x^2+a^2})+c}$

$l)\ \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x$ (a costante non nulla); $\boxed{\log(\pm x\pm\sqrt{x^2-a^2})+c \quad \text{se } x\geqslant a \ \ \text{oppure se } x\leqslant -a}$

$m)^\star \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+px+q}}\,\mathrm{d}x;$

$n) \displaystyle\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \qquad (a \text{ costante non nulla});$

$$\boxed{\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\log(x+\sqrt{x^2+a^2})\right]+c}$$

$o) \displaystyle\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x \qquad (a \text{ costante non nulla});$

$$\boxed{\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\log|x+\sqrt{x^2-a^2}|\right]+c}$$

$p)^\star \displaystyle\int \sqrt{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x;$

$q)^\star \displaystyle\int \sqrt{-x^2+px+q}\,\mathrm{d}x \qquad (p^2+4q>0);$

$r) \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{-x^2+x+2}}\,\mathrm{d}x \qquad (a \text{ costante non nulla});$

$$\boxed{-\sqrt{-x^2+x+2}-\ \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-x^2+x+2}}{x+1}+c}$$

$s) \displaystyle\int \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x;$

$$\boxed{-\frac{(x+1)(x+5+\sqrt{1-x^2})}{x+1+\sqrt{1-x^2}}-4\ \operatorname{arctg}\frac{1-x^2}{1+x}+c}$$

$t) \displaystyle\int \frac{1}{x(\sqrt{x^2+x+1})}\,\mathrm{d}x;$

$$\boxed{\log\left|\frac{1+x-\sqrt{x^2+x+1}}{1-x+\sqrt{x^2+x+1}}\right|+c}$$

$u) \displaystyle\int \frac{x^3+x}{\sqrt{-x^4+3x^2-2}}\,\mathrm{d}x;$

$$\boxed{-\frac{1}{2}\sqrt{-x^4+3x^2-2}-\frac{5}{2}\ \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-x^4+3x^2-2}}{x^2-1}+c}$$

$v) \displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+1}\,\mathrm{d}x;$

$$\boxed{\frac{-(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^4+4(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^3-4(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})+1}{4(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^2}-\log(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})+c}$$

$w) \displaystyle\int \frac{1}{x(1+\sqrt{x})^2}\,\mathrm{d}x;$

$$\boxed{\frac{2}{1+\sqrt{x}}+\log\frac{x}{(1+\sqrt{x})^2}+c}$$

$x) \displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x;$

$$\boxed{\frac{12}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7}-3\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4}+c}$$

$y) \displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{x^3-1}}\,\mathrm{d}x;$

$$\boxed{\frac{2}{9}(x^3+2)\sqrt{x^3-1}+c}$$

$z)$ $\displaystyle\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^3+1}}\,\mathrm{d}x;$

$$\boxed{-\frac{\sqrt{x^3+1}}{3x^3}+\frac{1}{6}\log\frac{\sqrt{x^3+1}+1}{|\sqrt{x^3+1}-1|}+c}$$

$\alpha)$ $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{(2x^4+1)^2}}{x}\,\mathrm{d}x;$

$$\frac{3}{8}\sqrt[3]{(2x^4+1)^2}+\frac{1}{8}\log\frac{(\sqrt[3]{2x^4+1}-1)^2}{\sqrt[3]{(2x^4+1)^2}+\sqrt[3]{2x^4+1}+1}+\frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{2x^4+1}+1}{\sqrt{3}}+c$$

$\beta)$ $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}\,\mathrm{d}x;$

$$\boxed{-\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}+c}$$

$\gamma)$ $\displaystyle\int x^{\sqrt{5}}(1+2x^{\sqrt{6}})^2\,\mathrm{d}x;$

$$\boxed{\frac{x^{\sqrt{5}+1}}{\sqrt{5}+1}+\frac{4x^{\sqrt{5}+\sqrt{6}+1}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}+1}+\frac{4x^{\sqrt{5}+2\sqrt{6}+1}}{\sqrt{5}+2\sqrt{6}+1}+c}$$

$\delta)$ $\displaystyle\int x(2-\sqrt{x})^{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x;$

$$\boxed{-2\left[\frac{8(2-\sqrt{x})^{1+\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}}-\frac{12(2-\sqrt{x})^{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}}+\frac{6(2-\sqrt{x})^{3+\sqrt{3}}}{3+\sqrt{3}}-\frac{(2-\sqrt{x})^{4+\sqrt{3}}}{4+\sqrt{3}}\right]+c}$$

$\varepsilon)$ $\displaystyle\int x^{\sqrt{2}}(2-x^2)^{-(3+\sqrt{2})/2}\,\mathrm{d}x;$

$$\boxed{\frac{1}{2(1+\sqrt{2})}\left(\frac{2-x^2}{x^2}\right)^{-(1+\sqrt{2})/2}+c}$$