Fisica 1 Elettronica e Telecomunicazioni. Compito del 27/6/2019

LEGGERE LE NOTE SUL RETRO

Problema 1 (6 punti) Le equazioni parametriche di un punto materiale, che descrive un moto circolare accelerato, sono :

$$x = R\cos(\alpha t^2)$$
$$y = R\sin(\alpha t^2)$$

con $R = 2$ m e $\alpha = 0.2$ rad/s^2. Determinare:

(a) Il modulo v della velocità,

(b) Il modulo a_t dell'accelerazione tangenziale

(c) Il modulo a_r dell'accelerazione radiale

dopo un giro a partire da $t = 0$.

Soluzione: Per prima cosa troviamo il tempo T corrispondente a 1 giro:

$$\alpha T^2 = 2\pi$$

da cui

$$T = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \simeq 5.60 \text{ s}.$$

La velocità angolare corrispondente è

$$\omega = 2\alpha T \simeq 2.24 \text{ rad/s},$$

per cui il modulo della velocità v è

$$v = \omega R \simeq 4.48 \text{ m/s}.$$

L'accelerazione tangenziale è

$$a_t = 2\alpha R \simeq 0.80 \text{ m/s}^2,$$

e quella radiale è

$$a_r = \omega^2 R \simeq 10.05 \text{ m/s}^2,$$

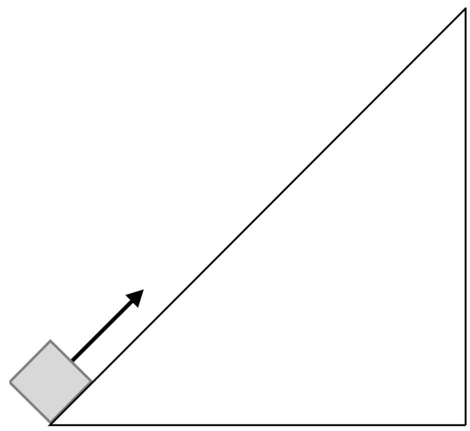
risultati che si possono ricavare anche derivando le equazioni del moto.

Problema 2 (8 punti) Un corpo di massa $m = 0.5$ kg viene lanciato con velocità iniziale $v_0 = 2$ m/s su un piano scabro (coefficiente di attrito dinamico e statico $\mu = 0.25$) nella direzione di massima salita. Il piano è inclinato di un angolo $\alpha = 30°$ rispetto all'orizzontale. Il corpo sale fino a un certo punto e poi comincia a scendere.

(a) Calcolare il tempo di salita T_1 (necessario a fermare il corpo) e quello di discesa T_2 (necessario per tornare alla posizione iniziale).

(b) Per quale angolo $\alpha_{\min}$ il tempo totale $T = T_1 + T_2$ è minimo?

(c) Per quale angolo massimo $\alpha_{\max}$ il tempo totale $T = T_1 + T_2$ diventa infinito?



Soluzione: Mettiamo l'asse x lungo il piano inclinato, nella direzione di massima salita e l'asse y perpendicolare al piano. Le forze agenti sul corpo sono la forza peso, la reazione del piano e l'attrito. La componente della forza peso lungo l'asse y è $-mg\cos(\alpha)$, ed è uguale in modulo alla reazione del piano. Lungo l'asse x abbiamo la componente della forza peso $-mg\sin(\alpha)$ e la forza di attrito $-\mu mg\cos(\alpha)$, che è sempre diretta in modo opposto al moto.

Nella fase di ascesa quindi abbiamo

$$m\ddot{x} = -mg\sin(\alpha) - \mu mg\cos(\alpha)$$

quindi è un moto uniformemente accelerato con accelerazione $a_1 = -g(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)) \simeq -7.02$ m/s^2. La velocità quindi segue la legge $v(t) = v_0 + a_1 t$ e il tempo T_1 per arrivare a $v = 0$ è

$$T_1 = -\frac{v_0}{a_1} = \frac{v_0}{g(\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha))} \simeq 0.28 \text{ s}$$

Il tratto ℓ percorso è

$$\ell = v_0 T_1 + \frac{1}{2}a_1 T_1^2 \simeq 0.28 \text{ m}$$

Durante la fase di discesa la velocità è negativa e quindi la legge del moto è

$$m\ddot{x} = -mg\sin(\alpha) + \mu mg\cos(\alpha)$$

quindi è un moto uniformemente accelerato con accelerazione $a_2 = -g(\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha)) \simeq -2.78$ m/s^2.

Il tempo T_2 per fare il tratto ℓ partendo da fermo è

$$\frac{1}{2}a_2 T_2^2 = \ell$$

e quindi

$$T_2 = \sqrt{\frac{2\ell}{a_2}} \simeq 0.45 \text{ s}$$

Il tempo totale $T = T_1 + T_2$ è

$$T = T_1 + T_2 = \frac{v_0}{g}\frac{\sin(\alpha)}{(1+\mu^2)\sin^2(\alpha) - \mu^2} \simeq 0.74 \text{ s}$$

Il tempo minimo corrisponde ad un angolo $\alpha_{\min} = 90°$ per cui non c'è attrito e $T_1 = T_2 = V_0/g \simeq 0.20$ s. Del resto la derivata di T rispetto a α è

$$\frac{dT}{d\alpha} = \frac{v_0}{g}\frac{(1+\mu^2)\sin^2(\alpha) + \mu^2}{((1+\mu^2)\sin^2(\alpha) - \mu^2)^2}\cos(\alpha)$$

che si annulla appunto per $\cos(\alpha) = 0$, ovvero per $\alpha = 90°$.

Il tempo infinito corrisponde al caso in cui la particella non riparte, ovvero per cui quando è ferma la forza peso è uguale alla forza di attrito

$$mg\sin(\alpha) = \mu mg\cos(\alpha)$$

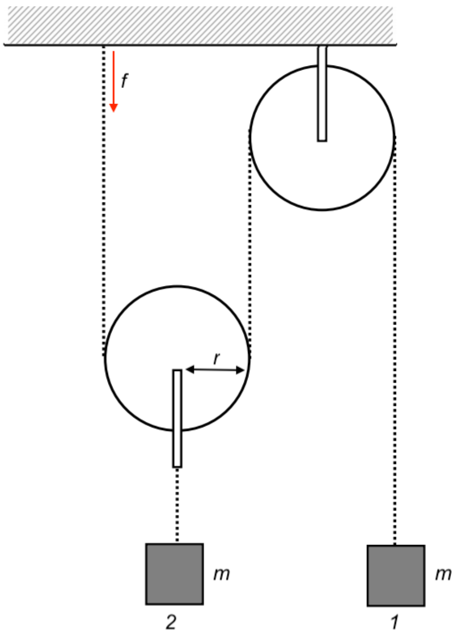
da cui

$$\tan(\alpha_{\max} = \mu; \qquad \alpha_{\max} = \arctan(\mu) \simeq 14.04°.$$

Problema 3 (8 punti) Due carrucole di massa trascurabile e raggio $r = 5$ cm sono collegate da una corda ideale senza massa e inestensibile (che non slitta) come indicato in figura. Alla fine della fune e alla carrucola intermedia sono attaccate due masse $0.5 = 0.5$ kg.

(a) Determinare l'accelerazione a della massa 1.

(b) Determinare la forza f esercitata dal gancio al soffitto a cui la fune è collegata



Soluzione: Il problema si può affrontare con le forze o con la conservazione dell'energia (più semplice). Il punto importante è che la carrucola intermedia sta effettivamente rotolando sulla corda ruotando istantaneamente sul punto A, quindi chiamando ω la sua velocità angolare, la velocità di C è ωr e quella di B $2\omega r$, lo stesso per le accelerazioni.

Quindi chiamando v_1 la velocità della massa 1, la velocità di traslazione della carrucola intermedia e della massa 2 è $v_2 = -v_1/2$ (diretta in senso opposto). Lo stesso per le accelerazioni.

Quindi per un piccolo spostamento (verso l'alto) cella massa 1, Δy_1, abbiamo uno spostamento verso il basso $\Delta y_2 = -\Delta y_1/2$ della massa 2, e ovviamente $v_1 = d\Delta y_1/dt$. Quindi scrivendo la conservazione dell'energia (o meglio il teorema delle forze vive)

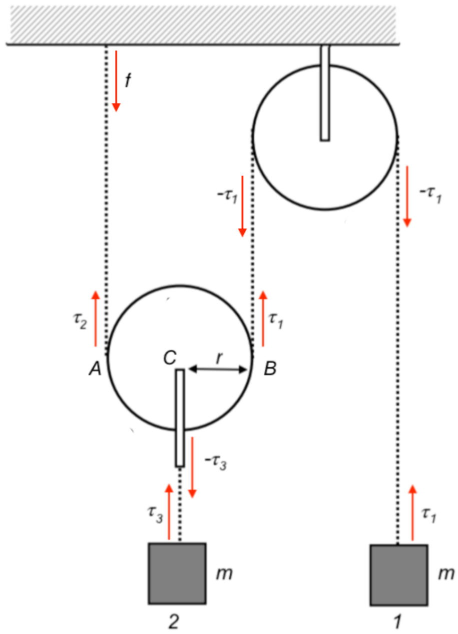
$$mg\Delta y_1 - mg\Delta y_2 = \frac{1}{2}\left(mv_1^2 + mv_2^2\right)$$

derivando rispetto al tempo abbiamo

$$g(v_1 - v_2) = v_1 a_1 + v_2 a_2$$

sostituendo $v_1 = v_2/2 = v$ e $a_1 = a_2/2 = a$ abbiamo

$$a = \frac{2}{5}g.$$



Con le forze, chiamiamo τ_1 la tensione della fune collegata alla massa 1

$$\tau_1 - mg = ma_1.$$

Dato che le carrucole non hanno massa, la tensione τ_1 è la stessa anche tra le due carrucole.

Chiamiamo τ_2 la tensione della fune tra la carrucola intermedia e la massa 2, e τ_3 quella tra la carrucola intermedia e il soffitto ($\tau_3 = -f$). Per la carrucola intermedia e la massa 2 abbiamo (prima cardinale)

$$\tau_2 - mg = ma_2.$$

e

$$\tau_3 + \tau_1 - \tau_2 = 0.$$

ovvero

$$\tau_3 + \tau_1 - \tau_2 = mg + ma_2.$$

Scrivendo la seconda cardinale per la carrucola intermedia e la massa 2 nel punto A abbiamo

$$2\tau_1 r - \tau_2 r = 0,$$

quindi

$$2\tau_1 = ma_2 + mg = -\frac{1}{2}ma_1 + mg.$$

Sostituendo

$$2mg + 2ma = -\frac{1}{2}ma + mg$$

e quindi

$$a = -\frac{2}{5}g$$

La forza f si ottiene dalla prima cardinale

$$f = -\tau_2 + \tau_1 = 0$$

da cui

$$f = \frac{3}{5}mg.$$

Problema 4 (7 punti) Si lascia cadere da fermo un corpo sferico di raggio $r = 4$ cm e di massa $m = 2$ kg in acqua. Il coefficiente γ di attrito viscoso (ovvero: forza attrito $f_a = -\gamma v$) è $\gamma = 6\pi\mu r$ con viscosità $\mu = 1$ Pa · s.

Determinare

(a) La profondità h raggiunta dal corpo dopo 3 s.

(b) La velocità asintotica $v(\infty)$

Soluzione: Il coefficiente di attrito viscoso è $\gamma \simeq 0.75$ kg/s. Il volume del corpo è $v = (4/3)\pi r^3 \simeq 0.27 \cdot 10^{-3}$ m^3. La sua densità è $\rho = m/V \simeq 7460.39$ kg/m^3.

La legge di moto del corpo è

$$m\ddot{z} = -mg + \rho_A V g - \gamma \dot{z} = -V(\rho - \rho_A)g - \gamma \dot{z}.$$

Chiamando $v = \dot{z}$ si ha

$$m\dot{v} = -V(\rho - \rho_A)g - \gamma v,$$

che è una equazione differenziale del primo ordine. La soluzione generale è

$$v = A \exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right),$$

e una soluzione particolare è

$$v_\infty = -\frac{V(\rho - \rho_A)g}{\gamma} = -\frac{2r^2 g}{9\mu}(\rho - \rho_A) \simeq -22.51 \text{ m/s}$$

che è anche la soluzione asintotica dato che è quella per cui $\dot{v} = 0$.

Mettendo tutto insieme e imponendo la condizione iniziale $v(0) = 0$ abbiamo

$$v(t) = v_\infty \left(1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right)\right).$$

Integrando $v = \dot{z}$ tra zero e t otteniamo

$$z(t) = v_\infty \left(t + \frac{m}{\gamma}\left(\exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right) - 1\right)\right),$$

da cui

$$z(3) = -27.09 \text{ m}$$

Problema 5 (7 punti) Una bombola di volume $V_0 = 50$ dm^3 contiene 30 moli di aria (approssimata con un gas biatomico ideale) a temperatura iniziale $T_0 = 300$ K. La bombola è posta in una mongolfiera semisgonfia contenente un volume iniziale $V = 10$ m^3 di aria a pressione standard ($P_A = 10^5 Pa$) e alla stessa temperatura T_0. La bombola perde aria (che finisce nella mongolfiera), così che alla fine tutta l'aria è alla stessa pressione atmosferica (si trascuri l'influenza delle pareti della mongolfiera). Determinare la temperatura finale T_f dell'aria nella mongolfiera approssimando l'espansione come se fosse una adiabatica reversibile, senza considerare gli scambi termici con l'atmosfera esterna.

Soluzione: Per prima cosa calcoliamo la pressione iniziale dell'aria nella bombola

$$P_0 = \frac{nRT_0}{V_0} \simeq 1.49 \cdot 10^6 \text{ Pa}.$$

Dalla legge delle adiabatiche reversibili $P^{(1-\gamma)/\gamma}T = \text{cost.}$ si calcola la temperatura finale T' del gas della bombola quando arriva alla pressione atmosferica. La costante $\gamma = c_P/c_V$ per un gas biatomico vale 7/5.

$$T' = T_0 \left(\frac{P_0}{P_A}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \simeq 138.55 \text{ K}.$$

A questo punto abbiamo uno scambio termico a pressione costante tra l'aria della bombola e quella della mongolfiera, fino ad arrivare a una temperatura comune T_f. Calcoliamo il numero N di moli di aria nella mongolfiera,

$$N = \frac{P_A V}{RT_0} \simeq 401.61$$

e quindi abbiamo

$$Nc_P(T_0 - T_f) = nc_P(T_f - T')$$

e quindi

$$T_f = \frac{NT_0 + nT'}{N + n} \simeq 288.78 \text{ K}.$$

NOTE

Istruzioni. Scrivere nome, cognome e matricola nell'ultima pagina (e lasciarla possibilmente bianca). Indicare chiaramente quale domanda viene trattata.

Per ogni domanda scrivere succintamente la strategia che si intende seguire (indicando le leggi fisiche usate) e dare la soluzione analitica (con i simboli) e quella numerica (con le unità di misura). In assenza delle indicazioni della strategia usata l'esercizio sarà nullo.

Consegnare solo la bella copia, marcando chiaramente le parti che non devono essere considerate. Trattenere la brutta copia o comunque appuntarsi i risultati per confrontarli con la soluzione (Moodle).

Valutazione. Viene valutato l'aver indicato correttamente le leggi usate, la derivazione analitica, il risultato analitico e numerico corretto. **Se è presente il solo risultato analitico o numerico l'esercizio non viene considerato valido.** ATTENZIONE: gli errori numerici non sono considerati errori gravi a meno che non siano facilmente riconoscibili dall'analisi dimensionale o da valori particolari dei parametri (per esempio se per una scelta dei parametri un risultato viene assurdo o zero senza che sia fisicamente giustificato). Anche per questo, aspettate a sostituire i valori numerici alla fine.

Alcune grandezze utili. Accelerazione di gravità: $g = 9.8$ m/s^2. Momento di inerzia baricentrale di un cilindro di raggio R e massa M: $I_G = (1/2)MR^2$. Momento di inerzia baricentrale di un'asta omogenea di lunghezza L e massa M: $I_G = (1/12)ML^2$. Costante dei gas $R = 8.3$ J/mol K. Conversione calorie-joule: 1 kcal = 4184 J. Pressione atmosferica $P_a = 10^5$ Pa. Calore specifico molare di un gas monoatomico $c_V = (3/2)R$, di un gas biatomico $c_V = (5/2)R$. Densità dell'acqua $\rho_a \simeq 1000$ kg/m^3.

Suggerimenti. LEGGERE ACCURATAMENTE E RILEGGERE IL TESTO DEL PROBLEMA. Attenzione alla conversione tra unità (equivalenze). I problemi possono contenere dati che non servono per trovare la soluzione. Di solito esistono più modi per arrivare alla soluzione. FARE IL DISEGNO del problema, in maniera più accurata possibile e magari da più punti di vista, e disegnare i diagrammi temporali delle componenti della traiettoria ($x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$...).