Esercizi IAS-guidato-19

(Prof.ssa D. Bubboloni) 7/1/2020

Isomorfismo di liberi e altre proprieta' del sottogruppo dei quadrati di un libero.

Sia F libero sull'insieme X e sia $F^2 := \langle w^2 : w \in F \rangle$ il sottogruppo generato dai quadrati. Allora:

a) F^2ch F e vale

$$|F/F^2| = \begin{cases} 2^{|X|} & \text{se } X \text{ e' finito} \\ |X| & \text{se } X \text{ e' infinito} \end{cases} \tag{1}$$

b) Se $\hat{F}$ e' libero su $\hat{X}$ e $F \simeq \hat{F}$, allora $|X| = |\hat{X}|$.

c) $F' \leq F^2$.

d) F non e' perfetto.

e) Ogni commutatore in F e' prodotto di quadrati.

Passi per la dimostrazione di a):

1. Considerare il gruppo $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ delle classi di resto modulo 2 e definire
$$H = \{f : X \to \mathbb{Z}_2 : |f^{-1}\{1\}| < \infty\}$$
Provare che e' un gruppo abeliano rispetto alla somma di funzioni.

2. Notare che
$$|H| = \begin{cases} 2^{|X|} & \text{se} X \text{ e' finito} \\ |X| & \text{se } X \text{ e' infinito} \end{cases}$$
e che $|H|$ esprime il numero di sottoinsiemi finiti di X.

3. Considerare per ogni $x \in X$ la $f_x \in H$ definita da
$$f_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x \\ 0 & \text{se } y \in X \setminus \{x\} \end{cases}$$
e la mappa $\alpha : X \to H$ data da $\alpha(x) = f_x$.

4. Provare che la proprietá universale fornisce β omomorfismo suriettivo.

5. Provare che ker$\beta \geq F^2$ e quindi che $|F/F^2| \geq |H|$.

6. Provare che F/F^2 e' abeliano, sfruttando il fatto che un gruppo in cui ogni elemento ha ordine che divide 2 e' abeliano.

7. Usare notazione bar per il quoziente di F rispetto a F^2 e sfruttarla per provare che il numero di elementi distinti in $\overline{F} = F/F^2$ e' al piú pari al numero di sottoinsiemi finiti di X ossia ad $|H|$.

Passi per la dimostrazione di b):

8. Da $F \simeq \hat{F}$ segue $F/F^2 \simeq \hat{F}/\hat{F}^2$... perche'?

9. Usare a) distinguendo caso finito e infinito per poter concludere.

Le dimostrazioni di c), d), e) *ora sono facili.*