Esercizi IAS-foglio 4-19

(D. Bubboloni) 7/1/2020

Esercizi su quaternioni e nilpotenti, sui gruppi di permutazioni, gruppo libero e riepilogo.

G denota sempre un gruppo.

1. Provare che gli unici sottogruppi ciclici di S_n che siano transitivi rispetto all'azione naturale su $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ sono quelli generati da un n-ciclo.

2. Sia G un gruppo finito. Provare che se, per ogni scelta di $x, y \in G$, $\langle x, y \rangle$ e' ciclico allora G e' ciclico. Vale lo stesso risultato sostituendo la parola ciclico con abeliano? E sostituendo la parola ciclico con risolubile?

3. Trovare la serie centrale ascendente per il gruppo dei quaternioni Q_8. Dedurne la classe di nilpotenza di Q_8.

4. Sia G un gruppo e per ogni $x \in G$ si definisca

$$Cyc_G(x) = \{y \in G : \langle x, y \rangle \text{ e' ciclico}\}.$$

Si dica se $Cyc_G(x)$ e' necessariamente un sottogruppo di G. Posto

$$Cyc(G) = \cap_{x \in G} Cyc_G(x)$$

si provi che si tratta di un sottogruppo contenuto in $Z(G)$. In particolare $Cyc(G) \trianglelefteq G$.

$Cyc(G)$ e' detto il *cyclizer* di G.

Il grafo $\Gamma_c(G)$ avente come insieme di vertici $V = G \setminus Cyc(G)$ e un lato $\{x, y\}$, per $x, y \in V$ distinti, se $\langle x, y \rangle$ e' ciclico, si dice il *grafo ciclico* associato a G.

Costruire $\Gamma_c(Q_8)$ e $\Gamma_c(D_8)$ e dire se i due grafi sono isomorfi.

5. Provare che S_n e' primitivo per ogni $n \geq 2$ e A_n e' primitivo per ogni $n \geq 3$. Tali gruppi si dicono i *primitivi banali* di S_n.

6. Provare che $G = \langle (123)(456), (1234) \rangle \leq S_6$ e' transitivo ma non regolare.

7. I gruppi S_n e A_n sono regolari per certi n?

8. Sia $G \leq S_n$. Provare che G e' primitivo e regolare se e solo se G e' generato da un p-ciclo e $n = p$.

9. Provare che se $G \leq S_n$ e' 2-transitivo e regolare se e solo se $G = S_2$.

10. Provare che non esiste alcun $G \leq S_n$ che risulti regolare e k-transitivo, con $k \geq 3$.

11. Sia $F(X)$ il gruppo libero sull'insieme X. Provare che

$$|F(X)| = \max\{\aleph_0, |X|\},$$

dove $\aleph_0$ denota la cardinalita' di $\mathbb{N}$.

12. Sia F_n il gruppo libero di rango $n \in \mathbb{N}$. Provare che vale

$$\frac{F_n}{F_n'} \simeq \mathbb{Z}^n.$$

13. Sia F_n il gruppo libero di rango n. Provare che, per $n \geq 2$, si ha

$$Z(F_n) = 1.$$

14. Sappiamo che $(G \times H)' \simeq G' \times H'$. Discutere se valga invece $(G \unlhd H)' \simeq G' \unlhd H'$. Piu' in generale, discutere la validita' di $(GH)' = G'H'$.

15. Sia G nilpotente finito e π un insieme di primi. Provare che, se G/G' e' un π-gruppo allora G e' un π-gruppo.

16. Sia G finito tale che per ogni $x, y \in G$ di ordine coprimo si abbia $xy = yx$. Allora G e' nilpotente. Tale risultato si puo' invertire?

17. Sia G un gruppo finito. Indichiamo con $\gamma_\infty(G)$ lintersezione di tutti i termini della serie centrale discendente $\gamma_i(G)$ di G. Si provi che:

1. $[\gamma_\infty(G), G] = \gamma_\infty(G)$;
2. $G/\gamma_\infty(G)$ e' nilpotente;
3. se N e' un sottogruppo normale di G tale che G/N e' nilpotente, allora $N \geq \gamma_\infty(G)$;
4. si deduca che se N_1 e N_2 sono sottogruppi normali di G tali che G/N_1 e G/N_2 sono nilpotenti, allora anche $G/(N_1 \cap N_2)$ e' nilpotente.

Il sottogruppo $\gamma_\infty(G)$ si dice residuo nilpotente di G.