Azioni di gruppi e scelte sociali

Daniela Bubboloni

Lezione per il corso di Istituzioni di algebra superiore
DIMAI-Università degli Studi di Firenze

Firenze, 1 Dicembre 2016

Tutti noi sappiamo (forse...) cosa sia l'Algebra e possiamo avere una idea di cosa sia (più o meno) una scelta sociale.

Ma (sicuramente) è difficile immaginare una relazione fra questi due settori...

Per capirla dobbiamo interpretare il concetto di scelta sociale tramite un modello matematico.

Tutti noi sappiamo (forse...) cosa sia l'Algebra e possiamo avere una idea di cosa sia (più o meno) una scelta sociale.

Ma (sicuramente) è difficile immaginare una relazione fra questi due settori...

Per capirla dobbiamo interpretare il concetto di scelta sociale tramite un modello matematico.

Tutti noi sappiamo (forse...) cosa sia l’Algebra e possiamo avere una idea di cosa sia (più o meno) una scelta sociale.

Ma (sicuramente) è difficile immaginare una relazione fra questi due settori...

Per capirla dobbiamo interpretare il concetto di scelta sociale tramite un modello matematico.

Scelte Sociali

Il contesto

- Un comitato $H = \{1, \ldots, h\}$ è costituito da $h \geq 2$ individui chiamati a pronunciarsi su un insieme $N = \{1, \ldots, n\}$ di $n \geq 2$ alternative
- Ciascun membro del comitato esprime una propria preferenza individuale tramite un ordine lineare (ranking) su N
- Le preferenze individuali su N vengono aggregate (scelta sociale) tramite un metodo che deve essere applicabile comunque si sia espresso ciascun membro.

Scelte Sociali

Il contesto

- Un comitato $H = \{1, \ldots, h\}$ è costituito da $h \geq 2$ individui chiamati a pronunciarsi su un insieme $N = \{1, \ldots, n\}$ di $n \geq 2$ alternative
- Ciascun membro del comitato esprime una propria preferenza individuale tramite un ordine lineare (ranking) su N
- Le preferenze individuali su N vengono aggregate (scelta sociale) tramite un metodo che deve essere applicabile comunque si sia espresso ciascun membro.

Scelte Sociali

Il contesto

- Un comitato $H = \{1, \ldots, h\}$ è costituito da $h \geq 2$ individui chiamati a pronunciarsi su un insieme $N = \{1, \ldots, n\}$ di $n \geq 2$ alternative
- Ciascun membro del comitato esprime una propria preferenza individuale tramite un ordine lineare (ranking) su N
- Le preferenze individuali su N vengono aggregate (scelta sociale) tramite un metodo che deve essere applicabile comunque si sia espresso ciascun membro.

Scelte Sociali

Il problema

Problema delle scelte sociali := come aggregare le preferenze individuali.

1. Scegliere cosa?
2. Scegliere come?

Per 1. due risposte principali:

1a. In output una preferenza sociale := un ordine lineare su N, ossia una lista che vada dalla "migliore" delle alternative alla "peggiore", nel senso del consenso globale ottenuto

1b. In output i vincitori := sottoinsieme di N, che esprima l'insieme delle alternative "migliori"

Scelte Sociali

Il problema

Problema delle scelte sociali := come aggregare le preferenze individuali.

1. Scegliere cosa?
2. Scegliere come?

Per 1. due risposte principali:

1a. In output una preferenza sociale := un ordine lineare su N, ossia una lista che vada dalla "migliore" delle alternative alla "peggiore", nel senso del consenso globale ottenuto

1b. In output i vincitori := sottoinsieme di N, che esprima l'insieme delle alternative "migliori"

Scelte Sociali

Il problema

Problema delle scelte sociali := come aggregare le preferenze individuali.

1. Scegliere cosa?
2. Scegliere come?

Per 1. due risposte principali:

1a. In output una preferenza sociale := un ordine lineare su N, ossia una lista che vada dalla "migliore" delle alternative alla "peggiore", nel senso del consenso globale ottenuto

1b. In output i vincitori := sottoinsieme di N, che esprima l'insieme delle alternative "migliori"

E altre due interessanti possibilità:

1c. In output una relazione sociale := relazione binaria R su N, tale che per $x, y \in N$ l'essere $(x, y) \in R$ esprima x non è peggiore di y

1d. In output un insieme di preferenze sociali := sottoinsieme di ordini lineari su N che esprimano rankings "compatibili" con le preferenze individuali espresse

E altre due interessanti possibilità:

1c. In output una relazione sociale := relazione binaria R su N, tale che per $x, y \in N$ l'essere $(x, y) \in R$ esprima x non è peggiore di y

1d. In output un insieme di preferenze sociali := sottoinsieme di ordini lineari su N che esprimano rankings "compatibili" con le preferenze individuali espresse

Per 2. la risposta è chiara (in apparenza): scegliere in modo da

soddisfare principi di equità!

Ma quali? Ed è veramente possibile soddisfarli?

Scelte Sociali

Per 2. la risposta è chiara (in apparenza): scegliere in modo da

soddisfare principi di equità!

Ma quali? Ed è veramente possibile soddisfarli?

I classici principi di equità irrinuciabili

- Anonimità: i nomi degli individui sono ininfluenti
- Neutralità: i nomi delle alternative sono ininfluenti
- Efficienza: se una alternativa x è considerata peggiore dell'alternativa y in tutte le preferenze individuali, allora x non appartiene all'insieme dei vincitori (contesto 1.b) o x non è considerata migliore di y nella preferenza sociale (contesto 1.c)

Altri principi auspicabili

- Simmetria inversa: il rovesciamento top down di tutte le preferenze individuali determina il rovesciamento top down della preferenza sociale
- Principio di maggioranza: se una maggioranza di individui preferisce l'alternativa x all'alternativa y, allora x è preferita a y anche nella preferenza sociale
- Risolutezza: il vincitore/ la preferenza sociale è unico/a

La maggioranza semplice

Un caso in cui tutto è chiaro:

$n = 2$ e h dispari.

Una delle alternative in $N = \{1, 2\}$, diciamo 1, occupa il primo posto nelle preferenze di almeno $\frac{h+1}{2}$ individui. Allora 1 è considerato il vincitore e $1 > 2$ è la preferenza sociale.

La maggioranza semplice sopra definita ha tutte le proprietà: è anonima, neutrale, efficiente, simmetrica inversa, rispetta la maggioranza ed è risoluta.

E' universalmente considerata l'unico metodo ragionevole da usare per due alternative e un numero dispari di individui.

La maggioranza semplice

Un caso in cui tutto è chiaro:

$n = 2$ e h dispari.

Una delle alternative in $N = \{1, 2\}$, diciamo 1, occupa il primo posto nelle preferenze di almeno $\frac{h+1}{2}$ individui. Allora 1 è considerato il vincitore e $1 > 2$ è la preferenza sociale.

La maggioranza semplice sopra definita ha tutte le proprietà: è anonima, neutrale, efficiente, simmetrica inversa, rispetta la maggioranza ed è risoluta.

E' universalmente considerata l'unico metodo ragionevole da usare per due alternative e un numero dispari di individui.

La maggioranza semplice

Un caso in cui tutto è chiaro:

$n = 2$ e h dispari.

Una delle alternative in $N = \{1, 2\}$, diciamo 1, occupa il primo posto nelle preferenze di almeno $\frac{h+1}{2}$ individui. Allora 1 è considerato il vincitore e $1 > 2$ è la preferenza sociale.

La maggioranza semplice sopra definita ha tutte le proprietà: è anonima, neutrale, efficiente, simmetrica inversa, rispetta la maggioranza ed è risoluta.

E' universalmente considerata l'unico metodo ragionevole da usare per due alternative e un numero dispari di individui.

La maggioranza semplice

Un caso in cui tutto è chiaro:

$n = 2$ e h dispari.

Una delle alternative in $N = \{1, 2\}$, diciamo 1, occupa il primo posto nelle preferenze di almeno $\frac{h+1}{2}$ individui. Allora 1 è considerato il vincitore e $1 > 2$ è la preferenza sociale.

La maggioranza semplice sopra definita ha tutte le proprietà: è anonima, neutrale, efficiente, simmetrica inversa, rispetta la maggioranza ed è risoluta.

E' universalmente considerata l'unico metodo ragionevole da usare per due alternative e un numero dispari di individui.

Il modello per le preferenze individuali e il profilo

$\mathcal{L}(N) :=$ l'insieme degli ordini lineari su N.

Ogni $i \in H$ esprime una preferenza individuale $p_i \in \mathcal{L}(N)$.

$\mathcal{L}(N)$ è naturalmente identificabile con:

a) il gruppo simmetrico $S_n = \mathrm{Sym}(N)$
b) l'insieme dei vettori colonna di N^n con componenti distinte

a) $\psi \in S_n$ si identifica con l'ordine lineare

$$q : \psi(1) > \psi(2) > \cdots > \psi(n)$$

Esempio $\psi = (12)(34)$ con $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ si identifica con

$$q : 2 > 1 > 4 > 3 > 5 > 6$$

Il modello per le preferenze individuali e il profilo

$\mathcal{L}(N) :=$ l'insieme degli ordini lineari su N.

Ogni $i \in H$ esprime una preferenza individuale $p_i \in \mathcal{L}(N)$.

$\mathcal{L}(N)$ è naturalmente identificabile con:

a) il gruppo simmetrico $S_n = \mathrm{Sym}(N)$
b) l'insieme dei vettori colonna di N^n con componenti distinte

a) $\psi \in S_n$ si identifica con l'ordine lineare

$$q : \psi(1) > \psi(2) > \cdots > \psi(n)$$

Esempio $\psi = (12)(34)$ con $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ si identifica con

$$q : 2 > 1 > 4 > 3 > 5 > 6$$

Il modello per le preferenze individuali e il profilo

$\mathcal{L}(N) :=$ l'insieme degli ordini lineari su N.

Ogni $i \in H$ esprime una preferenza individuale $p_i \in \mathcal{L}(N)$.

$\mathcal{L}(N)$ è naturalmente identificabile con:

a) il gruppo simmetrico $S_n = \mathrm{Sym}(N)$
b) l'insieme dei vettori colonna di N^n con componenti distinte

a) $\psi \in S_n$ si identifica con l'ordine lineare

$$q : \psi(1) > \psi(2) > \cdots > \psi(n)$$

Esempio $\psi = (12)(34)$ con $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ si identifica con

$$q : 2 > 1 > 4 > 3 > 5 > 6$$

Se $\psi(r) = x$, r è detto il rank di x in q e denotato $\mathrm{rank}_q(x)$. Nel q precedente, 2 ha rango 1, 1 ha rango 2, 4 ha rango 3...

b) Il vettore $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ si identifica con l'ordine lineare

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_n$$

- il rank di $x \in N$ è la posizione occupata da x nel vettore che esprime la preferenza

Se $\psi(r) = x$, r è detto il rank di x in q e denotato $\mathrm{rank}_q(x)$. Nel q precedente, 2 ha rango 1, 1 ha rango 2, 4 ha rango 3...

b) Il vettore $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ si identifica con l'ordine lineare

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_n$$

- il rank di $x \in N$ è la posizione occupata da x nel vettore che esprime la preferenza

Esempio

$$N = \{1, 2, 3\},\ H = \{1, 2\} \qquad p_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

L'individuo 1 preferisce l'alternativa 2 sia alla 1 che alla 3 e preferisce la 1 alla 3.

p_1 si identifica con la trasposizione $(12) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_3$.

Il rank di 2 è 1, il rank di 1 è 2, il rank di 3 è 3.

Invece p_2 si identifica con $id \in S_3$.

Esempio

$$N = \{1, 2, 3\},\ H = \{1, 2\} \qquad p_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

L'individuo 1 preferisce l'alternativa 2 sia alla 1 che alla 3 e preferisce la 1 alla 3.

p_1 si identifica con la trasposizione $(12) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_3$.

Il rank di 2 è 1, il rank di 1 è 2, il rank di 3 è 3.

Invece p_2 si identifica con $id \in S_3$.

Esempio

$$N = \{1, 2, 3\},\ H = \{1, 2\} \qquad p_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

L'individuo 1 preferisce l'alternativa 2 sia alla 1 che alla 3 e preferisce la 1 alla 3.

p_1 si identifica con la trasposizione $(12) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_3$.

Il rank di 2 è 1, il rank di 1 è 2, il rank di 3 è 3.

Invece p_2 si identifica con $id \in S_3$.

Esempio

$$N = \{1, 2, 3\},\ H = \{1, 2\} \qquad p_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

L'individuo 1 preferisce l'alternativa 2 sia alla 1 che alla 3 e preferisce la 1 alla 3.

p_1 si identifica con la trasposizione $(12) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_3$.

Il rank di 2 è 1, il rank di 1 è 2, il rank di 3 è 3.

Invece p_2 si identifica con $id \in S_3$.

Il comitato esprime un profilo di preferenze $p = (p_i)_{i=1}^h$ rappresentato da una matrice $n \times h$ a coefficienti in N

Esempio

$N = \{1, 2, 3\}$, $H = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

significa che l'individuo 1 ha la preferenza $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

l'individuo 2 la preferenza $p_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e cosí via

Il comitato esprime un profilo di preferenze $p = (p_i)_{i=1}^{h}$ rappresentato da una matrice $n \times h$ a coefficienti in N

Esempio

$N = \{1, 2, 3\}$, $H = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

significa che l'individuo 1 ha la preferenza $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

l'individuo 2 la preferenza $p_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e cosí via

Indichiamo con $\mathcal{P}$ l'insieme di tutti i possibili $n!^h$ profili.

Metodo Borda (1770)

Si assegnano punteggi s ai vari ranks $r \in \{1, \ldots, n\}$ nel seguente modo

$$\left[\begin{array}{c|c} \textit{ranking } \mathrm{r} & \textit{score } \mathrm{s} \\ \hline 1 & n-1 \\ 2 & n-2 \\ 3 & n-3 \\ \ldots & \ldots \\ n-1 & 1 \\ n & 0 \end{array}\right]$$

Ossia $s(r) = n - r$. Si considera, per ogni $p \in \mathcal{P}$, la funzione $s_p : N \to \mathbb{R}$ data da

$$s_p(x) = \sum_{i=1}^{h} s(\mathrm{rank}_{p_i}(x)).$$

Se "mettiamo in fila" le alternative in base al più alto s_p ottenuto, che succede?

Esempio

Vediamolo sul solito

$$p = \begin{array}{c} \color{red}{2} \\ \color{red}{1} \\ \color{red}{0} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

con gli scores annotati a fianco.

Si trova

$$s_p(1) = 6, \quad s_p(2) = 3, \quad s_p(3) = 6$$

1*a* Poichè 1 e 3 hanno identico score non possiamo costruire un ranking!

Se "mettiamo in fila" le alternative in base al più alto s_p ottenuto, che succede?

Esempio

Vediamolo sul solito

$$p = \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 0 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

con gli scores annotati a fianco.

Si trova

$$s_p(1) = 6, \quad s_p(2) = 3, \quad s_p(3) = 6$$

$1a$ Poichè 1 e 3 hanno identico score non possiamo costruire un ranking!

Se "mettiamo in fila" le alternative in base al più alto s_p ottenuto, che succede?

Esempio

Vediamolo sul solito

$$p = \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 0 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

con gli scores annotati a fianco.

Si trova

$$s_p(1) = 6, \quad s_p(2) = 3, \quad s_p(3) = 6$$

1*a* Poichè 1 e 3 hanno identico score non possiamo costruire un ranking!

1*b* Possiamo poi ottenere i vincitori tramite

$$\text{argmax } s_p(x) = \{1, 3\}$$

1*c* Abbiamo anche la relazione sociale R su N definita da $(x, y) \in R$ se $s_p(x) \geq s_p(y)$.

R è completa e transitiva (ma non antisimmetrica). Quindi determina "un ranking con pareggi".

Che non è poi così male...

Anonimità? Sì: il conteggio che facciamo prescinde dall'ordine in cui si considerano le colonne della matrice

Neutralità? Sì: conta solo la posizione dell'alternativa e non il nome

Risolutezza? No: ci possono essere più vincitori

$1b$ Possiamo poi ottenere i vincitori tramite

$$\mathrm{argmax}\ s_p(x) = \{1, 3\}$$

$1c$ Abbiamo anche la relazione sociale R su N definita da $(x, y) \in R$ se $s_p(x) \geq s_p(y)$.

R è completa e transitiva (ma non antisimmetrica). Quindi determina "un ranking con pareggi".

Che non è poi così male...

Anonimità? Sì: il conteggio che facciamo prescinde dall'ordine in cui si considerano le colonne della matrice

Neutralità? Sì: conta solo la posizione dell'alternativa e non il nome

Risolutezza? No: ci possono essere più vincitori

1*b* Possiamo poi ottenere i vincitori tramite

$$\text{argmax}\ s_p(x) = \{1, 3\}$$

1*c* Abbiamo anche la relazione sociale R su N definita da $(x, y) \in R$ se $s_p(x) \geq s_p(y)$.

R è completa e transitiva (ma non antisimmetrica). Quindi determina "un ranking con pareggi".

Che non è poi così male...

Anonimità? Sì: il conteggio che facciamo prescinde dall'ordine in cui si considerano le colonne della matrice

Neutralità? Sì: conta solo la posizione dell'alternativa e non il nome

Risolutezza? No: ci possono essere più vincitori

1b Possiamo poi ottenere i vincitori tramite

$$\mathrm{argmax}\ s_p(x) = \{1, 3\}$$

1c Abbiamo anche la relazione sociale R su N definita da $(x, y) \in R$ se $s_p(x) \geq s_p(y)$.

R è completa e transitiva (ma non antisimmetrica). Quindi determina "un ranking con pareggi".

Che non è poi così male...

Anonimità? Sì: il conteggio che facciamo prescinde dall'ordine in cui si considerano le colonne della matrice

Neutralità? Sì: conta solo la posizione dell'alternativa e non il nome

Risolutezza? No: ci possono essere più vincitori

$1b$ Possiamo poi ottenere i vincitori tramite

$$\operatorname{argmax} s_p(x) = \{1, 3\}$$

$1c$ Abbiamo anche la relazione sociale R su N definita da $(x, y) \in R$ se $s_p(x) \geq s_p(y)$.

R è completa e transitiva (ma non antisimmetrica). Quindi determina "un ranking con pareggi".

Che non è poi così male...

Anonimità? Sì: il conteggio che facciamo prescinde dall'ordine in cui si considerano le colonne della matrice

Neutralità? Sì: conta solo la posizione dell'alternativa e non il nome

Risolutezza? No: ci possono essere più vincitori

1*b* Possiamo poi ottenere i vincitori tramite

$$\text{argmax}\ s_p(x) = \{1, 3\}$$

1*c* Abbiamo anche la relazione sociale R su N definita da $(x, y) \in R$ se $s_p(x) \geq s_p(y)$.

R è completa e transitiva (ma non antisimmetrica). Quindi determina "un ranking con pareggi".

Che non è poi così male...

Anonimità? Sì: il conteggio che facciamo prescinde dall'ordine in cui si considerano le colonne della matrice

Neutralità? Sì: conta solo la posizione dell'alternativa e non il nome

Risolutezza? No: ci possono essere più vincitori

$1b$ Possiamo poi ottenere i vincitori tramite

$$\mathrm{argmax}\ s_p(x) = \{1, 3\}$$

$1c$ Abbiamo anche la relazione sociale R su N definita da $(x, y) \in R$ se $s_p(x) \geq s_p(y)$.

R è completa e transitiva (ma non antisimmetrica). Quindi determina "un ranking con pareggi".

Che non è poi così male...

Anonimità? Sì: il conteggio che facciamo prescinde dall'ordine in cui si considerano le colonne della matrice

Neutralità? Sì: conta solo la posizione dell'alternativa e non il nome

Risolutezza? No: ci possono essere più vincitori

Maggioranza? No: se y batte ogni altra alternativa x più di $h/2$ volte non necessariamente y viene selezionato dal metodo Borda.

Questo può/deve turbare i nostri sogni? Secondi alcuni sì...

Secondo voi?

Esempio

Consideriamo

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si trova

$$s_p(1) = 6, \quad s_p(2) = 7, \quad s_p(3) = 2$$

quindi 2 è il solo vincitore e ne siamo piuttosto soddisfatti, no?

Eppure 1 batte tre volte sia 2 che 3 ...

Maggioranza? No: se y batte ogni altra alternativa x più di $h/2$ volte non necessariamente y viene selezionato dal metodo Borda.

Questo può/deve turbare i nostri sogni? Secondi alcuni sì...

Secondo voi?

Esempio

Consideriamo

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si trova

$$s_p(1) = 6, \quad s_p(2) = 7, \quad s_p(3) = 2$$

quindi 2 è il solo vincitore e ne siamo piuttosto soddisfatti, no?

Eppure 1 batte tre volte sia 2 che 3 ...

E l’ Algebra in tutto questo? Finora sono apparsi

il gruppo S_n

e

le relazioni su un insieme....

Tutto quì?

Azioni di gruppi sull'insieme dei profili

Su $\mathcal{P}$ facciamo operare il gruppo $G = S_h \times S_n \times \Omega$, dove:

- $\Omega = \{id, \rho_0\} \leq S_n$
- $\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_n$

Dato $p \in \mathcal{P}$ e $(\varphi, \psi, \rho) \in G$, il profilo $p^{(\varphi,\psi,\rho)}$ ha come i-ma componente

$$p_i^{(\varphi,\psi,\rho)} := \psi p_{\varphi^{-1}(i)} \rho$$

composizione, da destra a sinistra, di permutazioni di S_n.

Azioni di gruppi sull'insieme dei profili

Su $\mathcal{P}$ facciamo operare il gruppo $G = S_h \times S_n \times \Omega$, dove:

- $\Omega = \{id, \rho_0\} \leq S_n$
- $\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_n$

Dato $p \in \mathcal{P}$ e $(\varphi, \psi, \rho) \in G$, il profilo $p^{(\varphi,\psi,\rho)}$ ha come i-ma componente

$$p_i^{(\varphi,\psi,\rho)} := \psi p_{\varphi^{-1}(i)} \rho$$

composizione, da destra a sinistra, di permutazioni di S_n.

Azioni di gruppi sull'insieme dei profili

Su $\mathcal{P}$ facciamo operare il gruppo $G = S_h \times S_n \times \Omega$, dove:

- $\Omega = \{id, \rho_0\} \leq S_n$
- $\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_n$

Dato $p \in \mathcal{P}$ e $(\varphi, \psi, \rho) \in G$, il profilo $p^{(\varphi,\psi,\rho)}$ ha come i-ma componente

$$p_i^{(\varphi,\psi,\rho)} := \psi p_{\varphi^{-1}(i)} \rho$$

composizione, da destra a sinistra, di permutazioni di S_n.

Quindi $p^{(\varphi,\psi,\rho)}$ è ottenuto da p

- rinominando $\varphi(i)$ l'individuo i
- rinominando $\psi(x)$ l'alternativa x
- spostando l'alternativa di rank r al rank $\rho(r)$

  (la prima diventa l'ultima, la seconda la penultima...)

Esempio

$$p = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \varphi = (134)(25) \\ \psi = (12) \\ \rho_0 = (13) \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$p^{(\varphi,id,id)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad p^{(id,\psi,id)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p^{(id,id,\rho_0)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad p^{(\varphi,\psi,\rho_0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

L' azione

Se $U \leq G$, la mappa $f : U \to \mathrm{Sym}(\mathcal{P})$ definita da

$$f(\varphi, \psi, \rho) : \mathcal{P} \to \mathcal{P}, \quad p \mapsto p^{(\varphi,\psi,\rho)}$$

è un'azione del gruppo U su $\mathcal{P}$.

In sostanza, $(p^{(\varphi_1,\psi_1,\rho_1)})^{(\varphi_2,\psi_2,\rho_2)} = p^{(\varphi_2\varphi_1,\psi_2\psi_1,\rho_2\rho_1)}$

Regole

Concentriamoci ora sulle scelte sociali $F : \mathcal{P} \to \mathcal{L}(N)$ di tipo 1a. Le chiameremo regole.

Diciamo che una regola F è U-simmetrica se, $\forall\, p \in \mathcal{P}$ e $(\varphi, \psi, \rho) \in U$

$$F\left(p^{(\varphi,\psi,\rho)}\right) = \psi F(p)\rho$$

- la $S_h \times \{id\} \times \{id\}$-simmetria per F corrisponde all'essere F anonima
- la $\{id\} \times S_n \times \{id\}$-simmetria per F corrisponde all'essere F neutrale
- la $\{id\} \times \{id\} \times \Omega$-simmetria per F corrisponde all'essere F simmetrica inversa
- la G-simmetria per F corrisponde all'essere F anonima, neutrale e simmetrica inversa

I gruppi

- I gruppi sono tipici descrittori di simmetria.

  Come tali trovano applicazione in tutti i settori della matematica pura ed applicata.

- L' uso dei gruppi per descrivere i livelli di simmetria delle scelte sociali è finora assai limitato.

I contributi in letteratura erano pochi e asistematici:

- Kelly (1991)
- Eğecioğlu (2009)

Bubboloni e Gori, dal 2014, stanno lavorando ad una fondazione di questa applicazione.

C'è spazio per il vostro contributo...

I gruppi

- I gruppi sono tipici descrittori di simmetria.

  Come tali trovano applicazione in tutti i settori della matematica pura ed applicata.

- L' uso dei gruppi per descrivere i livelli di simmetria delle scelte sociali è finora assai limitato.

I contributi in letteratura erano pochi e asistematici:

- Kelly (1991)
- Eğecioğlu (2009)

Bubboloni e Gori, dal 2014, stanno lavorando ad una fondazione di questa applicazione.

C'è spazio per il vostro contributo...

I gruppi

- I gruppi sono tipici descrittori di simmetria.

  Come tali trovano applicazione in tutti i settori della matematica pura ed applicata.

- L' uso dei gruppi per descrivere i livelli di simmetria delle scelte sociali è finora assai limitato.

I contributi in letteratura erano pochi e asistematici:

- Kelly (1991)
- Eğecioğlu (2009)

Bubboloni e Gori, dal 2014, stanno lavorando ad una fondazione di questa applicazione.

C'è spazio per il vostro contributo...

I gruppi

- I gruppi sono tipici descrittori di simmetria.

  Come tali trovano applicazione in tutti i settori della matematica pura ed applicata.

- L' uso dei gruppi per descrivere i livelli di simmetria delle scelte sociali è finora assai limitato.

I contributi in letteratura erano pochi e asistematici:

- Kelly (1991)
- Eğecioğlu (2009)

Bubboloni e Gori, dal 2014, stanno lavorando ad una fondazione di questa applicazione.

C'è spazio per il vostro contributo...

Una questione naturale

Sotto quali condizioni su U, l'insieme $\mathcal{F}^U$ delle regole U-simmetriche è non vuoto?

Gruppi regolari

$U \leq G$ si dice *regolare* se, $\forall p \in \mathcal{P}$,

esiste $\psi_* \in S_n$ coniugato di ρ_0 tale che

$$\mathrm{Stab}_U(p) \subseteq (S_h \times \{id\} \times \{id\}) \cup (S_h \times \{\psi_*\} \times \{\rho_0\})$$

Una questione naturale

Sotto quali condizioni su U, l'insieme $\mathcal{F}^U$ delle regole U-simmetriche è non vuoto?

Gruppi regolari

$U \leq G$ si dice *regolare* se, $\forall p \in \mathcal{P}$,

esiste $\psi_* \in S_n$ coniugato di ρ_0 tale che

$$\mathrm{Stab}_U(p) \subseteq (S_h \times \{id\} \times \{id\}) \cup (S_h \times \{\psi_*\} \times \{\rho_0\})$$

Teorema (Bubboloni e Gori, 2015)

$\mathcal{F}^U \neq \varnothing \iff U$ è regolare

Problema

Come riconoscere i gruppi regolari?

Per $x, \pi \in \mathbb{N}$ con π primo, sia x_π la π-parte di x.

Per $\varphi \in S_h$ sia $T(\varphi)$ il tipo di φ, cioè la lista delle lunghezze delle orbite di φ.

- $\varphi = (12)(345)(678) \in S_{10} \Longrightarrow T(\varphi) = [3, 3, 2, 1, 1]$

Teorema (Bubboloni e Gori, 2015)

$\mathcal{F}^U \neq \varnothing \iff U$ è regolare

Problema

Come riconoscere i gruppi regolari?

Per $x, \pi \in \mathbb{N}$ con π primo, sia x_π la π-parte di x.

Per $\varphi \in S_h$ sia $T(\varphi)$ il tipo di φ, cioè la lista delle lunghezze delle orbite di φ.

- $\varphi = (12)(345)(678) \in S_{10} \implies T(\varphi) = [3, 3, 2, 1, 1]$

Teorema (Bubboloni e Gori, 2015)

$\mathcal{F}^U \neq \varnothing \iff U$ è regolare

Problema

Come riconoscere i gruppi regolari?

Per $x, \pi \in \mathbb{N}$ con π primo, sia x_π la π-parte di x.

Per $\varphi \in S_h$ sia $T(\varphi)$ il tipo di φ, cioè la lista delle lunghezze delle orbite di φ.

- $\varphi = (12)(345)(678) \in S_{10} \Longrightarrow T(\varphi) = [3, 3, 2, 1, 1]$

Teorema (Bubboloni e Gori, 2015)

$\mathcal{F}^U \neq \varnothing \iff U$ è regolare

Problema

Come riconoscere i gruppi regolari?

Per $x, \pi \in \mathbb{N}$ con π primo, sia x_π la π-parte di x.

Per $\varphi \in S_h$ sia $T(\varphi)$ il tipo di φ, cioè la lista delle lunghezze delle orbite di φ.

- $\varphi = (12)(345)(678) \in S_{10} \Longrightarrow T(\varphi) = [3, 3, 2, 1, 1]$

Teorema (Bubboloni e Gori, 2015)

$$U \leq G \text{ è regolare } \iff \text{a), b) sono soddisfatte}$$

a) Se $(\varphi, \psi, id) \in U$ e per un primo π si ha $|\psi|_\pi = \pi^a > 1$

$\implies \pi^a \nmid \gcd(T(\varphi))$

b) Se $(\varphi, \psi, \rho_0) \in U$ e $\psi^2 = id$ con ψ non coniugato di ρ_0

$\implies 2 \nmid \gcd(T(\varphi))$

Corollario

G è regolare $\iff \gcd(h, n!) = 1$

Quindi la richiesta di anonimità, neutralità e risolutezza può raramente essere soddisfatta!

Per di più, le richieste di simmetria non accompagnate da una qualche richiesta di maggioranza potrebbero determinare regole altamente insoddisfacenti.

Abbiamo detto, ad esempio che l'efficienza è irrinunciabile...

Corollario

G è regolare $\iff \gcd(h, n!) = 1$

Quindi la richiesta di anonimità, neutralità e risolutezza può raramente essere soddisfatta!

Per di più, le richieste di simmetria non accompagnate da una qualche richiesta di maggioranza potrebbero determinare regole altamente insoddisfacenti.

Abbiamo detto, ad esempio che l'efficienza è irrinunciabile...

Corollario

G è regolare $\iff \gcd(h, n!) = 1$

Quindi la richiesta di anonimità, neutralità e risolutezza può raramente essere soddisfatta!

Per di più, le richieste di simmetria non accompagnate da una qualche richiesta di maggioranza potrebbero determinare regole altamente insoddisfacenti.

Abbiamo detto, ad esempio che l'efficienza è irrinunciabile...

La maggioranza

Sia $\nu \in \mathbb{N}$, con $\frac{h}{2} < \nu \leq h$, una soglia di maggioranza.

Diciamo che $q \in \mathcal{L}(N)$ asseconda la soglia ν nel profilo p se, quando almeno ν individui preferiscono x a y in p (notazione $x >_{\nu}^{p} y$), allora x è preferito a y in q.

$C_{\nu}(p) :=$ l'insieme degli ordini lineari che assecondano ν nel profilo p

- Nota che l'efficienza, per una regola $F : \mathcal{P} \to \mathcal{L}(N)$, non è altro che la richiesta $F(p) \in C_h(p)$.

La maggioranza

Sia $\nu \in \mathbb{N}$, con $\frac{h}{2} < \nu \leq h$, una soglia di maggioranza.

Diciamo che $q \in \mathcal{L}(N)$ asseconda la soglia ν nel profilo p se, quando almeno ν individui preferiscono x a y in p (notazione $x >_\nu^p y$), allora x è preferito a y in q.

$C_\nu(p) :=$ l'insieme degli ordini lineari che assecondano ν nel profilo p

- Nota che l'efficienza, per una regola $F : \mathcal{P} \to \mathcal{L}(N)$, non è altro che la richiesta $F(p) \in C_h(p)$.

Esempio

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad 1 >_4^p 2, \quad 2 >_3^p 3, \quad 3 >_3^p 1$$

$$\Downarrow$$

La soglia $\nu = 3$ produce un cosiddetto ciclo di Condorcet che impedisce l'esistenza di un ordine lineare assecondante

$$C_3(p) = \varnothing$$

$$C_4(p) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$C_5(p) = \mathcal{L}(\{1, 2, 3\})$$

Teorema (Greenberg (1979), Can-Storken (2013))

$$C_\nu(p) \neq \varnothing, \ \forall p \in \mathcal{P} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \nu > \frac{n-1}{n} h.$$

In particolare $C_h(p) \neq \varnothing$, per tutti i $p \in \mathcal{P}$, qualunque sia n.

Definiamo la soglia minimale di maggioranza per $p \in \mathcal{P}$

$$\nu(p) := \min \left\{ \nu > \frac{h}{2} : C_\nu(p) \neq \varnothing \right\}$$

Con $\nu(p)$ guardiamo, per il singolo profilo, a quale livello di maggioranza è possibile scegliere davvero qualcosa.

Nell'esempio precedente si ha $\nu(p) = 4$.

In presenza di "cicli" $\nu(p)$ diventa grande. In certi casi è h.

Teorema (Greenberg (1979), Can-Storken (2013))

$$C_\nu(p) \neq \varnothing,\ \forall p \in \mathcal{P} \qquad \iff \qquad \nu > \frac{n-1}{n}h.$$

In particolare $C_h(p) \neq \varnothing$, per tutti i $p \in \mathcal{P}$, qualunque sia n.

Definiamo la soglia minimale di maggioranza per $p \in \mathcal{P}$

$$\nu(p) := \min\left\{\nu > \frac{h}{2} : C_\nu(p) \neq \varnothing\right\}$$

Con $\nu(p)$ guardiamo, per il singolo profilo, a quale livello di maggioranza è possibile scegliere davvero qualcosa.

Nell'esempio precedente si ha $\nu(p) = 4$.

In presenza di "cicli" $\nu(p)$ diventa grande. In certi casi è h.

Teorema (Greenberg (1979), Can-Storken (2013))

$$C_\nu(p) \neq \varnothing,\ \forall p \in \mathcal{P} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \nu > \frac{n-1}{n} h.$$

In particolare $C_h(p) \neq \varnothing$, per tutti i $p \in \mathcal{P}$, qualunque sia n.

Definiamo la soglia minimale di maggioranza per $p \in \mathcal{P}$

$$\nu(p) := \min \left\{ \nu > \frac{h}{2} : C_\nu(p) \neq \varnothing \right\}$$

Con $\nu(p)$ guardiamo, per il singolo profilo, a quale livello di maggioranza è possibile scegliere davvero qualcosa.

Nell'esempio precedente si ha $\nu(p) = 4$.

In presenza di "cicli" $\nu(p)$ diventa grande. In certi casi è h.

Teorema (Greenberg (1979), Can-Storken (2013))

$$C_\nu(p) \neq \varnothing,\ \forall p \in \mathcal{P} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \nu > \frac{n-1}{n} h.$$

In particolare $C_h(p) \neq \varnothing$, per tutti i $p \in \mathcal{P}$, qualunque sia n.

Definiamo la soglia minimale di maggioranza per $p \in \mathcal{P}$

$$\nu(p) := \min \left\{ \nu > \frac{h}{2} : C_\nu(p) \neq \varnothing \right\}$$

Con $\nu(p)$ guardiamo, per il singolo profilo, a quale livello di maggioranza è possibile scegliere davvero qualcosa.

Nell'esempio precedente si ha $\nu(p) = 4$.

In presenza di "cicli" $\nu(p)$ diventa grande. In certi casi è h.

Teorema (Greenberg (1979), Can-Storken (2013))

$$C_\nu(p) \neq \varnothing,\ \forall p \in \mathcal{P} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \nu > \frac{n-1}{n} h.$$

In particolare $C_h(p) \neq \varnothing$, per tutti i $p \in \mathcal{P}$, qualunque sia n.

Definiamo la soglia minimale di maggioranza per $p \in \mathcal{P}$

$$\nu(p) := \min\left\{\nu > \frac{h}{2} : C_\nu(p) \neq \varnothing\right\}$$

Con $\nu(p)$ guardiamo, per il singolo profilo, a quale livello di maggioranza è possibile scegliere davvero qualcosa.

Nell'esempio precedente si ha $\nu(p) = 4$.

In presenza di "cicli" $\nu(p)$ diventa grande. In certi casi è h.

Teorema (Greenberg (1979), Can-Storken (2013))

$$C_\nu(p) \neq \varnothing, \ \forall p \in \mathcal{P} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \nu > \frac{n-1}{n} h.$$

In particolare $C_h(p) \neq \varnothing$, per tutti i $p \in \mathcal{P}$, qualunque sia n.

Definiamo la soglia minimale di maggioranza per $p \in \mathcal{P}$

$$\nu(p) := \min \left\{ \nu > \frac{h}{2} : C_\nu(p) \neq \varnothing \right\}$$

Con $\nu(p)$ guardiamo, per il singolo profilo, a quale livello di maggioranza è possibile scegliere davvero qualcosa.

Nell'esempio precedente si ha $\nu(p) = 4$.

In presenza di "cicli" $\nu(p)$ diventa grande. In certi casi è h.

$F : \mathcal{P} \to \mathcal{L}(N)$ è una regola di maggioranza minimale se, per ogni $p \in P$,

$$F(p) \in C_{\nu(p)}(p)$$

$\mathcal{F}_{\text{min}} :=$ insieme delle regole di maggioranza minimale.

$$\mathcal{F}_{\text{min}} \neq \varnothing \quad \text{(per definizione!)}$$

$\mathcal{F}^{U}_{\text{min}} := \mathcal{F}^{U} \cap \mathcal{F}_{\text{min}}$ è il, molto più interessante, insieme delle regole di maggioranza minimale U-simmetriche

$F : \mathcal{P} \to \mathcal{L}(N)$ è una regola di maggioranza minimale se, per ogni $p \in P$,

$$F(p) \in C_{\nu(p)}(p)$$

$\mathcal{F}_{\text{min}} :=$ insieme delle regole di maggioranza minimale.

$$\mathcal{F}_{\text{min}} \neq \varnothing \quad \text{(per definizione!)}$$

$\mathcal{F}^{U}_{\text{min}} := \mathcal{F}^{U} \cap \mathcal{F}_{\text{min}}$ è il, molto più interessante, insieme

delle regole di maggioranza minimale U-simmetriche

$F : \mathcal{P} \to \mathcal{L}(N)$ è una regola di maggioranza minimale se, per ogni $p \in P$,

$$F(p) \in C_{\nu(p)}(p)$$

$\mathcal{F}_{\text{min}} :=$ insieme delle regole di maggioranza minimale.

$$\mathcal{F}_{\text{min}} \neq \varnothing \quad \text{(per definizione!)}$$

$\mathcal{F}^U_{\text{min}} := \mathcal{F}^U \cap \mathcal{F}_{\text{min}}$ è il, molto più interessante, insieme

delle regole di maggioranza minimale U-simmetriche

Problema

Sotto quali condizioni per U, $\mathcal{F}^{U}_{\text{min}} \neq \varnothing$?

Risultato sorprendente

Teorema (Bubboloni e Gori, 2015)

$$\mathcal{F}^{U}_{\text{min}} \neq \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad U \text{ è regolare}$$

- Le $F \in \mathcal{F}^{U}_{\text{min}}$ sono tutte potenzialmente costruibili affidandosi ad un sistema di rappresentanti per le orbite di U su $\mathcal{P}$.

Problema

Sotto quali condizioni per U, $\mathcal{F}^U_{\text{min}} \neq \varnothing$?

Risultato sorprendente

Teorema (Bubboloni e Gori, 2015)

$$\mathcal{F}^U_{\text{min}} \neq \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad U \text{ è regolare}$$

- Le $F \in \mathcal{F}^U_{\text{min}}$ sono tutte potenzialmente costruibili affidandosi ad un sistema di rappresentanti per le orbite di U su $\mathcal{P}$.

Problema

Sotto quali condizioni per U, $\mathcal{F}^U_{\text{min}} \neq \varnothing$?

Risultato sorprendente

Teorema (Bubboloni e Gori, 2015)

$$\mathcal{F}^U_{\text{min}} \neq \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad U \text{ è regolare}$$

- Le $F \in \mathcal{F}^U_{\text{min}}$ sono tutte potenzialmente costruibili affidandosi ad un sistema di rappresentanti per le orbite di U su $\mathcal{P}$.

Il ruolo dei grafi

Ad un profilo $p \in \mathcal{P}$ si può associare un grafo diretto pesato in vari modi. L'insieme dei vertici è sempre N. Poniamo

$$A = \{(x, y) \in N^2 : x \neq y\}$$

e per $(x, y) \in A$,

$$w_p(x, y) = |\{i \in H : x > y \text{ in } p_i\}|.$$

$w_p(x, y)$ dice quante volte l'alternativa x è preferita all'alternativa y.

- Grafo pesato $\Gamma(p)$. Gli archi sono tutte le coppie $(x, y) \in A$ e sono considerati con peso $w_p(x, y)$.
- Grafi di maggioranza $\Gamma_\nu(p)$. Data la soglia di maggioranza ν, gli archi sono tutte le coppie $(x, y) \in A$ tali che $w_p(x, y) \geq \nu$ e sono considerati con peso $w_p(x, y)$.

Il ruolo dei grafi

Ad un profilo $p \in \mathcal{P}$ si può associare un grafo diretto pesato in vari modi. L'insieme dei vertici è sempre N. Poniamo

$$A = \{(x, y) \in N^2 : x \neq y\}$$

e per $(x, y) \in A$,

$$w_p(x, y) = |\{i \in H : x > y \ \text{ in } p_i\}|.$$

$w_p(x, y)$ dice quante volte l'alternativa x è preferita all'alternativa y.

- Grafo pesato $\Gamma(p)$. Gli archi sono tutte le coppie $(x, y) \in A$ e sono considerati con peso $w_p(x, y)$.
- Grafi di maggioranza $\Gamma_\nu(p)$. Data la soglia di maggioranza ν, gli archi sono tutte le coppie $(x, y) \in A$ tali che $w_p(x, y) \geq \nu$ e sono considerati con peso $w_p(x, y)$.

Il ruolo dei grafi

Ad un profilo $p \in \mathcal{P}$ si può associare un grafo diretto pesato in vari modi. L'insieme dei vertici è sempre N. Poniamo

$$A = \{(x, y) \in N^2 : x \neq y\}$$

e per $(x, y) \in A$,

$$w_p(x, y) = |\{i \in H : x > y \text{ in } p_i\}|.$$

$w_p(x, y)$ dice quante volte l'alternativa x è preferita all'alternativa y.

- Grafo pesato $\Gamma(p)$. Gli archi sono tutte le coppie $(x, y) \in A$ e sono considerati con peso $w_p(x, y)$.
- Grafi di maggioranza $\Gamma_\nu(p)$. Data la soglia di maggioranza ν, gli archi sono tutte le coppie $(x, y) \in A$ tali che $w_p(x, y) \geq \nu$ e sono considerati con peso $w_p(x, y)$.

- I grafi rendono più chiari (geometrici) alcuni concetti chiave quali ciclo e connessione.
- Recentemente assieme a Gori abbiamo usato i grafi di maggioranza $\Gamma_\nu(p)$ per studiare le proprietà di simmetria inversa per scelte sociali del tipo $C : \mathcal{P} \to 2^N$.

  Abbiamo esaminato in particolare la Minimax, ossia la scelta sociale M che determina l'insieme dei vincitori associati al profilo $p \in \mathcal{P}$ tramite

$$M(p) = \operatorname*{argmin}_{x \in N} \max_{y \in N \setminus \{x\}} w_p(y, x).$$

  ossia selezionando le alternative che minimizzano la massima non-preferenza (perdita) nel confronto due a due fra le alternative.

- I grafi rendono più chiari (geometrici) alcuni concetti chiave quali ciclo e connessione.

- Recentemente assieme a Gori abbiamo usato i grafi di maggioranza $\Gamma_\nu(p)$ per studiare le proprietà di simmetria inversa per scelte sociali del tipo $C : \mathcal{P} \to 2^N$.

  Abbiamo esaminato in particolare la Minimax, ossia la scelta sociale M che determina l'insieme dei vincitori associati al profilo $p \in \mathcal{P}$ tramite

  $$M(p) = \operatorname{argmin}_{x \in N} \max_{y \in N \setminus \{x\}} w_p(y, x).$$

  ossia selezionando le alternative che minimizzano la massima non-preferenza (perdita) nel confronto due a due fra le alternative.

- I grafi rendono più chiari (geometrici) alcuni concetti chiave quali ciclo e connessione.

- Recentemente assieme a Gori abbiamo usato i grafi di maggioranza $\Gamma_\nu(p)$ per studiare le proprietà di simmetria inversa per scelte sociali del tipo $C : \mathcal{P} \to 2^N$.

  Abbiamo esaminato in particolare la Minimax, ossia la scelta sociale M che determina l'insieme dei vincitori associati al profilo $p \in \mathcal{P}$ tramite

$$M(p) = \operatorname*{argmin}_{x \in N} \max_{y \in N \setminus \{x\}} w_p(y, x).$$

  ossia selezionando le alternative che minimizzano la massima non-preferenza (perdita) nel confronto due a due fra le alternative.

- Un altra idea su cui abbiamo lavorato è quella di ottenere un insieme di vincitori tramite il concetto di flusso massimo su $\Gamma(p)$. In questo caso lo strumento principale è il famoso teorema di teoria delle reti noto come Maxflow-Mincut.

Riferimenti

H. Moulin, *The strategy of social choice*, 1983.

D. Bubboloni, M. Gori, Anonymous and neutral majority rules, *Social Choice and Welfare* **43** (2014), 377-401

D. Bubboloni, M. Gori, Symmetric majority rules, *Mathematical Social Sciences* **76** (2015), 73-86

D. Bubboloni, M. Gori, On the reversal bias of the Minimax social choice correspondence, *Mathematical Social Sciences* **81** (2016), 53-61

D. Bubboloni, M. Gori, Resolute refinements of social choice correspondences, *Mathematical Social Sciences* **84** (2016), 37-49

D. Bubboloni, M. Gori, On the flow network method, (2016) in preparazione