Homework 4 - Algebra Lineare

(Prof.ssa D. Bubboloni)

Assegnato 21 Novembre 2019 - consegna martedi' 26 Novembre 2019.

1. Si consideri il determinante della matrice

$$A_b = \begin{pmatrix} -b & 0 & 3 \\ 2 & 1 & b+2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

al variare di $b \in \mathbb{Q}$. Si dica:

i) per quali b esiste A_b^{-1} e si dica quanto vale $det\, A^{-1}$;

ii) per quali b si ha $\text{rank}A_b = 2$;

iii) per quali b il sistema $AX = [-1, 3, 4]^T$ ammette soluzione unica;

iv) per quali b il sistema $AX = [0, 0, 0]^T$ ammette soluzione unica.

2. Discutere il seguente sistema sfruttando il teorema di Rouche'- Capelli e la teoria del determinante

$$\begin{cases} x - by &= 3 \\ bx - y &= b+4 \\ x - y &= b \end{cases}$$

Suggerimento: si inizi calcolando il determinante della matrice completa del sistema.

3. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ il seguente sistema

$$\begin{cases} x + y - az = a \\ 2x + y - z = a \\ ax - 3y - z = a \end{cases}$$

Successivamente, dire se esistono valori di a per cui il sistema è omogeneo e in tal caso esplicitarne le soluzioni.

4. Dire sotto quale condizione su $b \in \mathbb{Q}$ i seguenti vettori di $\mathbb{Q}^4$,

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ b \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b+1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

formano una base di $\mathbb{Q}^4$.

5. Si definiscano le potenze ad esponente naturale di una matrice quadrata, sfruttando il prodotto righe per colonne.

6. Dire se e' vero che per ogni $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ vale:

1) $\det(A - B) = \det(A) - \det(B)$.

2) $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$.

3) $\det(\lambda A) = \lambda^3 \det(A)$.

Se e' noto che $\det(A + B) = 4$ e $\det(A) = 6$, dire quanto vale $\det(AB + A^2)$. Si puo' concludere che la matrice $AB + A^2$ sia invertibile?

7. Calcolare, se esiste, l'inversa M^{-1} di

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice a coefficienti reali, usando l'algoritmo di Gauss. Controllare il risultato ottenuto provando che $MM^{-1} = I$.

7. Calcolare, se esiste, l'inversa M^{-1} di

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice a coefficienti nel campo con due elementi$F_2 = \{0, 1\}$., Controllare il risultato ottenuto provando che $MM^{-1} = I$.