Esercitazione per Intermedia II - Algebra Lineare

(Prof.ssa D. Bubboloni)
10 Dicembre 2019.

1. Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f([x, y, z]^T) = \left(\begin{array}{ccc} 2x & -y & \\ -x & +y & +2z \\ & y & +4z \end{array} \right)$$

provare che e' lineare. Trovarne nucleo e immagine. Dire se f e' biunivoca. Trovarne gli autovalori.

2. Sia $a \in \mathbb{R}$. Data la funzione $f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f_a([x, y]^T) = \left(\begin{array}{cc} ax^2 - ax + 3x^2 & -y \\ -x & +y \end{array} \right)$$

provare che, in generale, non e' lineare. Provare che esiste un unico a, per cui f_a sia lineare. Per tale a dire se f_a ammette una base di autovettori.

3. Scrivere la forma quadratica Q_A su $\mathbb{R}^3$ associata al polinomio omogeneo

$$p(x, y, z) = 2x^2 + 4xy + 6yz - 8xz + 2y^2 + z^2$$

e stabilire se è definita positiva/negativa o indefinita. In base a quanto ottenuto si puo' concludere che $p(x, y, z) > 0$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$?

4. Provare che la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

ammette 0 come autovalore di molteplicitá 2. Trovare i restanti autovalori. Dire se esiste una matrice invertibile e ortogonale C tale che $C^{-1}MC$ sia diagonale (non e' richiesto di esplicitare C). Esibire due autovettori di M fra loro ortogonali e di norma 1.

5. Si consideri l' applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dopo aver mostrato che $|\mathrm{sp}(A)| = 2$, trovare i due autospazi. Dire se $\mathbb{R}^4$ ammette una base di autovettori di L_A e in caso affermativo esibirla.

6. Dati i vettori di $\mathbb{R}^4$,

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

si calcoli $||X||, ||Y||, P_Y(X), P_X(Y)$, la distanza fra X e Y e l'angolo γ fra essi. Giustificare il fatto che γ sia ottuso.

7. Provare che se $X, Y \in \mathbb{R}^n$ allora $X - P_Y(X)$ e' ortogonale a Y. Evidenziare geometricamente la situazione analizzando un esempio in $\mathbb{R}^2$.

8. Si consideri

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$$

Sia $A \in M_2(\mathbb{Q})$ tale che $AB = B^{-1}A$. Provare che A non e' invertibile. Dare un esempio di matrice $A \neq 0$ soddisfacente $AB = B^{-1}A$.

9. Scrivere la forma quadratica Q_A su $\mathbb{R}^3$ associata al polinomio omogeneo

$$p(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xy - 2xz$$

e stabilire se è definita positiva/negativa o indefinita. In base a quanto ottenuto si puo' concludere che esistono $x, y, z \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che $p(x, y, z) = 0$?

10. Sia $A \in M_n(\mathbb{Q})$ tale che $detA = 2$. Provare che se $B \in M_n(\mathbb{Q})$ realizza l'uguaglianza fra matrici

$$ABA = BAB,$$

allora $detB \in \{0, 2\}$.

11. Scrivere la funzione $\rho_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, rotazione di angolo $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Controllare che essa non ammette autovalori reali. Calcolare

$$\rho_\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e controllare che

$$\left|\left| \rho_\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|\right| = \left|\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|\right|.$$

Perché tale fatto non desta sorprese?