

Forme bilineari

Def Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ si può considerare la funzione di due variabili $X, Y \in \mathbb{R}^n$ data da

$$b(X, Y) = \underbrace{X^T A Y}_{1 \times 1} \quad \text{e } a \text{ valori in } \mathbb{R}.$$

Tale $b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è detta la forma bilineare associata ad A. Il motivo di questa terminologia deriva dal fatto che b è lineare sia rispetto alla prima variabile X che alla seconda Y ossia valgono

$$a) \quad b(\lambda X_1 + \mu X_2, Y) = \lambda b(X_1, Y) + \mu b(X_2, Y)$$

$$b) \quad b(X, \lambda Y_1 + \mu Y_2) = \lambda b(X, Y_1) + \mu b(X, Y_2)$$

ES. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ la forma bilineare

associata è $b: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$b(X, Y) = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ 2y_1 + 4y_2 \end{pmatrix} = x_1(y_1 - y_2) + x_2(2y_1 + 4y_2) =$$

$$= x_1 y_1 - x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 4x_2 y_2$$

Questo esempio ci dice che se $A = (a_{ij})$
allora $b(x, y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j$ o se si preferisce

ci dice che $b(e_i, e_j) = a_{ij}$ cioè se b è
la forma bil. associata ad A allora i
termini a_{ij} della matrice A sono i valori
che b assume sulla coppia (e_i, e_j) .

Si not. che b è un polinomio di grado 2 nelle $2n$ variabili
 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$.

Def. Se A è matrice simmetrica (cosa importante)

la forma bil. b associata si dice simmetrica
in quanto $b(x, y) = b(y, x)$. Infatti:

$$b(x, y) = x^T A y \in \mathbb{R} \text{ e quindi coincide con il}$$
$$\text{suo trasposto, cioè con } (x^T A y)^T = y^T A^T x =$$
$$= y^T A x \text{ e questo è } b(y, x).$$

$$\uparrow$$

perché $A^T = A$

ESEMPIO 1. Il prodotto scalare fra vettori è la
forma bilineare simmetrica associata alla
matrice $A = I_n$.

ESERCIZIO Riconoscere come forma bil line in \mathbb{R}^2 il polinomio a 4 variabili:

$$p(x_1, x_2, y_1, y_2) = 3x_1y_1 - x_1y_2 + 6x_2y_2$$

È del tipo $\sum a_{ij}x_iy_j$ dove $a_{11} = 3$, $a_{12} = -1$

$$a_{21} = 0 \quad a_{22} = 6 \quad \text{e cui si ha } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$e \quad p(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Ai fini del vostro corso più che le forme bilineari simmetriche b sono interessanti le forme quadratiche Q ottenute calcolando b

su coppie uguali di vettori ossia le funzioni

$Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definite da

$$Q(x) := x^T A x = b(x, x)$$

Forme quadratiche

Def. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica (cioè $A = A^T$). La funzione $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$Q(x) = x^T A x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

si dice la forma quadratica associata ad A (dove $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$). Se $n=2$ spesso usiamo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ anziché $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e denotare il generico elemento di \mathbb{R}^2 .

ES. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q(x) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$

$1 \times 2 \qquad 2 \times 2 \qquad 2 \times 1$

$$= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ -3x + y \end{pmatrix} = x(2x - 3y) + y(-3x + y) =$$

$$= 2x^2 - 3xy - 3yx + y^2 \stackrel{\substack{\uparrow \\ xy=yx}}{=} 2x^2 - 6xy + y^2$$

Notate il $-6 = 2 \cdot (-3)$

comparsa come coefficiente del termine misto.

⊗ cioè ogni termine ha grado 2: $x^2 + y^2 - x + 1$ non è omogeneo.

- Q quadratica si esprime come un polinomio omogeneo di grado 2[⊗] nelle componenti di $x \in \mathbb{R}^n$. Dal polinomio si risolve facilmente alla matrice ricordando di dividere per 2 i termini misti.

ES. Dato il polinomio $x^2 - 2y^2 - z^2 - 4xz + 5yx$ interpretarlo, se possibile, come forma quadratica in \mathbb{R}^3 . Vogliamo vederlo come

$$Q(x) = x^T A x \quad \text{dove} \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Perché il pol è omogeneo la cosa è possibile via

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 & -2 \\ 5/2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

N.B. A differenza delle forme bilineari ci dobbiamo ricordare di dividere per 2 i coeff. dei termini misti: xy, xz, yz

OSS. 1) Se $Q(x) = x^T A x$ allora $Q(e_i) = a_{ii}$

cioè gli element. diagonali di A sono valori assunti da Q; invece gli a_{ij} con $i \neq j$

non sono necessariamente valori assunti dalla funzione Q (altre differenze rispetto alle bilineari!)

2) Gli esempi più semplici di f.q. vengono

dalle A diagonali. È chiaro che

se $A = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ allora

$$Q(x) = x^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

ES. $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$$Q_A(x) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 (= \|x\|^2)$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

$$Q_B(x) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2$$

$$C = \begin{pmatrix} -3 & & \\ & -2 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$Q_C(x) = -3x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2$$

$$Q_D(x) = x_1^2 + x_3^2$$

3) È interessante notare che se $B \in M_n(\mathbb{R})$

è una matrice non simmetrica e si ne calcola

$$f(x) = \overbrace{x^T B x}^{1 \times 1}, \text{ essendo } f(x) \in \mathbb{R}, \text{ si ha}$$

$$f(x) = [f(x)]^T = x^T B^T x \quad \text{in cui}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f(x) + f(x)}{2} = \frac{x^T B x + x^T B^T x}{2} = \\ &= x^T \left(\frac{B + B^T}{2} \right) x \end{aligned}$$

La matrice $A = \frac{B + B^T}{2}$ è simmetrica

$$\text{perché } \left(\frac{B + B^T}{2} \right)^T = \frac{1}{2} (B^T + B) = \frac{B + B^T}{2}$$

Ad es $f(x) = (x \ y) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 4y^2 - 2xy +$
 $+ 3yx = x^2 + 4y^2 + yx$
coincide con la f.q. di matrice

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In altre parole le funzioni $f(x) = x^T B x$

con B qualunque sono sempre pensabili come f.q. (banslamente perché sono sempre descritte da polinomi omogenei di grado 2).

Le f.q.Q sono interessanti nelle applicazioni soprattutto in relazione al loro segno, cioè al segno che può assumere il numero reale $Q(x)$. Che $Q(0) = 0$ è chiaro qualunque sia Q ; ma per gli altri $x \in \mathbb{R}^n$ che succede?

Nei esempi visti è chiaro cosa accade:

Q_A è positiva, $\forall x \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$

Q_C è negativa, $\forall x \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$

Q_B ha segno variabile perché

$$Q_B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 > 0, \quad Q_B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

Q_D è positiva o nulla perché $x_1^2 + x_3^2 \geq 0 \quad \forall x_1, x_2, x_3$
e inoltre $Q_D(0, a, 0) = 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Def. Sia Q f.q. di matrice A e W ssp di \mathbb{R}^n

Diciamo che

i) $Q \stackrel{(A)}{\vee}$ è definita positiva su W se

$$Q(x) > 0, \quad \forall x \in W - \{0\}$$

ii) $Q \stackrel{(A)}{\vee}$ è semidefinita positiva su W se

$$Q(x) \geq 0, \quad \forall x \in W - \{0\}$$

iii) $Q \stackrel{(A)}{\vee}$ è definita negativa su W se

$$Q(x) < 0, \quad \forall x \in W - \{0\}$$

(iv) Q $\begin{pmatrix} \circ & A \end{pmatrix}$ è semidefinita negativa su W se

$$Q(x) \leq 0 \quad \forall x \in W - \{0\}$$

(v) Q $\begin{pmatrix} \circ & A \end{pmatrix}$ è indefinita su W

se non è né semidef > 0
né " < 0

ossia se esistono $x_1, x_2 \in W$
t.e.

$$Q(x_1) > 0, \quad Q(x_2) < 0$$

Forme quadratiche
non identicamente 0

indefinite	
SEMIDEF > 0	SEMIDEF < 0
semidef > 0 proprie ($\exists x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ con $Q(x) = 0$)	semidef < 0 proprie ($\exists x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ con $Q(x) = 0$)
def > 0	def < 0

N.B. la forma quadratica identicamente
0 è l'unica che risulta sia semidef > 0

che semidef < 0 . 2) le matrici def > 0 sono un sottoinsieme delle
(\circ) semidef > 0 (< 0).

• Se la matrice di Q è diagonale, tutto è
chiaro: basta guardare i segni degli elementi
sulla diagonale e controllare la presenza

- Solo + \Rightarrow def > 0
- Solo - \Rightarrow " < 0
- Solo + e alcuni - \Rightarrow indefinite
- Solo + o 0 \Rightarrow semidef > 0
- Solo - o 0 \Rightarrow semidef < 0 .

ES. $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2$ è def > 0

su \mathbb{R}^3 ; è semidefinita positiva //

su \mathbb{R}^4 , le rispettive matrici sono

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 3 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 3 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Si noti che su $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ si ha $Q(x) = 0$ quindi

in \mathbb{R}^4 è semidefinita propria.

Esercizio

Nell'ambito delle f.g. Q non identicamente nulle, non esistono Q che risultino contemporaneamente $\text{seudef} > 0$ e $\text{seudef} < 0$.

Infatti, per esempio, sia $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con $Q \neq 0$, che sia $\text{seudef} > 0$ e $\text{seudef} < 0$. Allora $\forall x \in \mathbb{R}^n$ si ha $Q(x) \geq 0$ e $Q(x) \leq 0$ quindi $Q(x) = 0 \forall x$ contro il fatto che $Q \neq 0$.

In altre parole l'insieme delle f.g. non identicamente 0 è ripartito in 5 regioni due a due disgiunte.

Questa semplice osservazione renderebbe più facile il compito di individuare a quale delle def (i) - (v) una certa Q soddisfi.

Un'altro caso semplice è quello in cui
sulla diagonale di A vi siano elementi di

segno diverso. In tal caso Q è indefinita su $W = \mathbb{R}^n$

ES. $Q(x) = x^T A x$ con $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ è indef.

perché $Q(e_1) = \underset{\substack{\wedge \\ 0}}{-1}$, $Q(e_2) = \underset{\substack{\vee \\ 0}}{2}$

Ovviamente su $W = \text{span}\{e_2\}$ A è def > 0

mentre su $Z = \text{span}\{e_1\}$ " < 0

Com'è su $U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$?

$$Q\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

e per perché

$$Q(\lambda x) = (\lambda x)^T A \lambda x = \lambda^2 x^T A x = \lambda^2 (-1) < 0$$

\uparrow
gi' scolo'
migliorone nei prodotti RC

abbiamo Q definita negativa su U .

Abbiamo l'impero che: se $\frac{Q(x) > 0}{(< 0)}$

$\Rightarrow \frac{Q(\lambda x) > 0}{(< 0)}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, cioè se una

forma quadratiche assume un certo segno
su un certo $x \in \mathbb{R}^n$, allora lo assume su
tutto il sottospazio $\text{span}\{x\} = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
generato da x .

In realtà per controllare se Q è def > 0 su \mathbb{R}^n si può sempre ragionare su una opportuna "versione diagonale" di Q .

In fatti se ci interessa il segno della funzione $Q(x) = x^T A x$ per una certa A simmetrica, cerchiamo $x = CY$ con C matrice invertibile $n \times n$: poiché $Y \mapsto CY$ è biviaria, le variare di Y in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e x descritte da $X = CY$ sono tutti gli element. di $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
Dunque i valori assum. da $Q(x)$ per $x \in \mathbb{R}^n$ sono gli sten. di quelli assum. per $Y \in \mathbb{R}^n$ dalla funzione di Y

$$Q(CY) = (CY)^T A CY = Y^T (C^T A C) Y$$

Si not. che $Q'(Y) = Y^T (C^T A C) Y$ è una f.g. pdt $(C^T A C)^T = C^T A^T C = C^T A C$,
ossia $C^T A C$ è ancora simmetrica.

Può essere + facile ragionare su $C^T A C$

unichè su A ? Sì se $C^T A C$ è diagonale!

Abbiamo ora due strumenti per ragionare:

- 1) L'algoritmo di Gauß simmetrico
- 2) Il segno degli autovalori.

importante!

1 Gauß SIMMETRICO

Un modo facile per passare da una matrice A ad una $C^T A C$ è utilizzare l'algoritmo di Gauß in modo simmetrico cioè ripetendolo sulle colonne, passo per passo, quello che è

stato fatto sulle righe. Questo perché le azioni

righe dell'alg. di Gauß possono vederi come moltiplicazione ^{ad destra} per una matrice M (omettiamo i dettagli) e le corrispondenti azioni sulle colonne

ESEMPIO Stabilire il segno della f. q. det. azioni sulle colonne

$$Q(x) = x^T A x \quad \text{se}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

come moltiplicazioni a sinistra per M^T . Per cui facendo azioni righe seguite da azioni colonne si passa da A a $M^T A M$

Qui a_{ii} sono tutti < 0 per cui si può

Solo dire che A non è $\text{seccidef} > 0$.

Uso EG simmetrico.

$$R \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + R_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \rightarrow C_2 + C_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_1}$$

$$R \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \rightarrow C_3 - C_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

check: tutte

le righe che faccio una "operazione riga" seguita da

una "operazione colonna" trovo una nuova mat simmetrica

Ci troviamo in un punto critico per il dettore
 rispetto alla sottomatrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e qui ogni $a_{ii} = 0$

Vedo che $a_{23} = -1 \neq 0$: eseguo $R_2 \rightarrow R_2 + R_3$

e poi $C_2 \rightarrow C_2 + C_3$ (Zona III. dell'algoritmo)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ma si può
proseguire.

$$R_3 \rightarrow R_3 - \frac{1}{2}R_2 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \rightarrow C_3 - \frac{1}{2}C_2}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Quindi Q è indefinita.

Attenzione: se fosse
qualcosa sulle
righe lo dovrete
ripetere sempre
anche sulle colonne

Es. Moltiplico per
-1 la 2^a riga,
Allora sono costretto
a moltip. per -1
anche la 2^a colonna
e quindi non è
un gran vantaggio)

VEDI PAG. SEGUENTE PER LA DESCRIZIONE
DELL'ALGORITMO

Metodi per studiare la

definizione di matrici su \mathbb{R}^p :

$Q \neq 0$

1. EG simmetrica fa passare dalla matrice originaria ad una congruente (\Rightarrow) che descrive lo stesso forma quadratico.

Così tutto si può leggere nella

INDEFINITE	
$\text{semidef} > 0$	$\text{semidef} < 0$
SEMIDEF stretta	SEMIDEF stretta
$\text{def} > 0$	$\text{def} < 0$

RIDUZIONE DI GAUSS SIMMETRICA

I $a_{11} \neq 0$

\Rightarrow operazioni riga sguite dalle corrispondenti operazioni colonna

II $a_{11} = 0$ ma $a_{ii} \neq 0$ per almeno un $i > 1$. Allora

$R_1 \leftrightarrow R_i$ e $C_1 \leftrightarrow C_i$

porta a_{ii} in prima posizione diag e si procede come in I.

III $a_{ii} = 0 \forall i$. Si cerca un $a_{ij} \neq 0$

e poi si opera con $R_i \rightarrow R_j + R_i$

e $C_i \rightarrow C_j + C_i$

portando 2 $a_{ij} \neq 0$ in i-tesima posizione diagonale per cui si risolve in II

matrice finale facilmente letta e

diagonale

N.B. Il ragionamento è scritto in il passo 1 cioè se a_{11} non riguarda tutti i passi

Proposta: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ è indefinita (con EG simm; si imbatte in III 11)

2. Il segno degli autovalori

Teorema Sia Q la forma quadratica $Q(x) = x^T A x$ con $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica. Q risulta:

$$\begin{array}{l} \text{def } > 0 \\ (< 0) \end{array} \iff \forall \text{ autovalore } \tilde{\epsilon} > 0 \quad (< 0)$$

$$\begin{array}{l} \text{seudef } > 0 \\ (< 0) \end{array} \iff \tilde{\epsilon} \geq 0 \quad (\leq 0)$$

Di conseguenza Q è indefinita \iff esistono λ_1, λ_2 autovalori di A t.e. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$.

In fine Q è seudef > 0 propria se gli autovalori sono 0 con molteplicità ≥ 1 e gli altri positivi; seudef < 0 propria se autovalori tutti < 0 e 0 almeno con mult. 1.

dim. Sia Q def > 0 . Allora $Q(x) = x^T A x > 0$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Per il teorema spettrale, applicabile poiché A è simmetrica, esiste

$C \in M_n(\mathbb{R})$ ortogonale (ossia t.e. $C^T = C^{-1}$)

tale che $C^T A C = C^{-1} A C = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

dove i λ_i sono gli autovalori di A .

$$\begin{aligned} \text{Allora } Q(CY) &= (CY)^T A CY = Y^T C^T A C Y = \\ &= Y^T \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 > 0 \quad \forall Y \in \mathbb{R}^n - \{0\} \end{aligned}$$

e quindi ogni $\lambda_i > 0$

Vicerebbe se tutti gli autovalori di A sono positivi
 considerata la C che proviene dal teorema
 spettrale ancora una volta, si ha che

$$C^T A C = C^{-1} A C = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

e i valori assunti da $Q(x)$ ^{$x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$} coincidono con quelli
 assunti da $Q(CY) = Y^T \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$.

per $Y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$: ma se $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \neq 0$ ciò significa
 che $y_i \neq 0$ per almeno un i_0 e quindi

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 = \underbrace{\lambda_{i_0} y_{i_0}^2}_{> 0} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n \lambda_i y_i^2 > 0$$

Pertanto Q è definita positiva.

La dimostrazione negli altri casi è analogo.
 Completate per esercizio. 

ES.1 Dire se è definita positiva la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} 4-x & 0 & -1 \\ 0 & 3-x & 1 \\ -1 & 1 & 1-x \end{pmatrix} =$$

$$= (4-x) [(3-x)(1-x) - 1] - (3-x)$$

$$= (4-x) (\lambda^2 - 4\lambda + 3 - 1) - 3 + x =$$

$$= (4-x) (\lambda^2 - 4\lambda + 2) - 3 + x =$$

$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 2\lambda + 4\lambda^2 - 16\lambda + 8 - 3 + x = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 5$$

E ora?

Si capisce come

Tale metodo sarebbe di scarsa utilità - se fosse necessario trovare esplicitamente gli autovalori di A . Per fortuna, si possono contare permanenze e variazioni nel polinomio caratteristico di A usando il Criterio di Cartesio:

TEOREMA

Si è $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_d x^d \in \mathbb{R}^{(n)}[x]$

con $a_d \neq 0$ con tutte le radici reali (questo accade al pol. caratteristico di A simmetrica!) Allora:

(i) 0 è radice di $p \Leftrightarrow d \geq 1$ e in tal caso $m(0) = d$

(ii) p ha tutte radici positive, contate con le relative molteplicità, quante sono le variazioni di segno nella successione dei coefficienti non nulli di p .

N.B.
(le radici negative vengono di conseguenza)

ES2 $p(x) = -x^3 + 38x - 31$ è il pol. caract. d'una mat. sim. \bar{A}

\rightarrow 0 non è radice • la sequenza dei

coeff $\neq 0$ è $(-1, 38, -1)$

$\begin{matrix} \nearrow & \nearrow \\ - & + \\ \text{una} & \text{una variazione} \\ \text{variazione} & \end{matrix}$

Quindi abbiamo 2 radici > 0

Ne segue che la terza radice è

lineare < 0 , quindi \bar{A} è indefinita.

Nel caso affrontato prima ^{es 1} avevamo invece

$$p_*(\lambda) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 5$$

quindi un 0 e 3 radici reali per cui 3 radici > 0

e possiamo concludere che A è definita positiva.

Controllate anche con Gauß simmetrico!

Oss. Si potrebbe pensare che lavorando in EG
 simmetrico ^{su A} gli element. diagonol. che appaiono
 sulla matrice diagonale finale siano necessa-
 riamente gli autovalori di A ma non è
 così (provare tu a credere!). Quello che è vero
 è che hanno gli stessi segni degli autovalori
 di A.

Def. Se A è simmetrica, $Q(x) = x^T A x$
 e per una certa C ortogonale si ha $C^{-1} A C =$
 $= \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D$, si dice che la forma quadraticca
 $Y^T D Y$ è la forma canonica di Q.

ES. Date $Q(x) = 5x^2 + 3y^2 - 6xy$ dire
 quale è il suo segno e trovare la forma
 canonica.

Si ha $Q(x) = x^T A x$ dove $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

e $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

Essendo $P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$
 $= (5-\lambda)(3-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 8\lambda + 6$

Da cui $p_A(\lambda) = 0$ per $\lambda = 4 \pm \sqrt{16-6} = 4 \pm \sqrt{10}$.

entrambi $> 0 \Rightarrow Q$ è definita positiva e

la forma canonica è $(x' \ y') \begin{pmatrix} 4-\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 4+\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =$
 $= (4-\sqrt{10})x'^2 + (4+\sqrt{10})y'^2$

Se $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ è legato a $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ da $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

per una certa C (di cui ci basta l'esistenza).

Interpretazione geometrica

La forma canonica di $Q(x)$ è ottenuta dal cambio di variabile, $X = CY$.

Ora $X = [x]_{\mathcal{B}}$, $C = C_{\mathcal{B}} \mathcal{B}$ (id).

per cui $Y = [x]_{\mathcal{B}}$.

basi ortogonale di autovettori, per cui stiamo dicendo

che questo \sqrt{x} (rispetto al riferimento cartesiano) ^{un punto del piano}

dato dalla base ortogonale \mathcal{B} , l'espressione

di Q è semplice, cioè è di tipo diagonale. Di conseguenza

è semplice anche interpretare nel piano l'oggetto $Q(x) = \text{costante}$.

Ad esempio cosa rappresenta in \mathbb{R}^2 l'equazione

$$5x^2 + 3y^2 - 6xy = 4 \quad ?$$

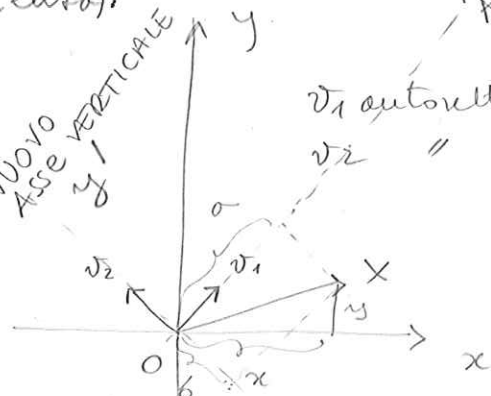
Un'ellisse \mathcal{E} !! Infatti nel nuovo riferimento

$$\text{diventa} \quad (4-\sqrt{10})x'^2 + (4+\sqrt{10})y'^2 = 4$$

$$\frac{x'^2}{\frac{4}{4-\sqrt{10}}} + \frac{y'^2}{\frac{4}{4+\sqrt{10}}} = 1$$

di semiassi $\sqrt{\frac{4}{4-\sqrt{10}}}$, $\sqrt{\frac{4}{4+\sqrt{10}}}$

NUOVO
ASSE VERTICALE
y



v_1 autovettore μ $4+\sqrt{10}$
 v_2 " " $4-\sqrt{10}$

(perché
queste è la C
del teorema
spettrale!)

dove \mathcal{B} è

Ma se è un'ellisse nel nuovo riferimento lo è anche nel vecchio perché non abbiamo variato le distanze / gli angoli (perché C è matrice ortogonale!) per cui forma e misure si conservano.

Vogliamo essere più accurati. e vedere come è messo \mathcal{E} nel riferimento originario?

$$V_{4-\sqrt{10}} : \begin{pmatrix} 5 - (4 - \sqrt{10}) & -3 \\ -3 & 3 - (4 - \sqrt{10}) \end{pmatrix}$$

Mi fido che una rife sia superflua

Coppie fate Gauss:

ma è chiaro che

$$\frac{5 - 4 + \sqrt{10}}{-3} = \frac{-3}{3 - 4 + \sqrt{10}}$$

Con

$$v_1 : y = 1$$

$$x = \frac{3}{1 + \sqrt{10}} \approx$$

perché

$$(1 + \sqrt{10})(\sqrt{10} - 1) = 9 \quad \checkmark$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 3/1 + \sqrt{10} \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{\begin{pmatrix} 3/1 + \sqrt{10} \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{\left(\frac{3}{1 + \sqrt{10}}\right)^2 + 1}}$$

$$V_{4+\sqrt{10}} : \begin{pmatrix} 5 - (4 + \sqrt{10}) & -3 \\ -3 & 3 - (4 + \sqrt{10}) \end{pmatrix}$$

$$y = 1$$

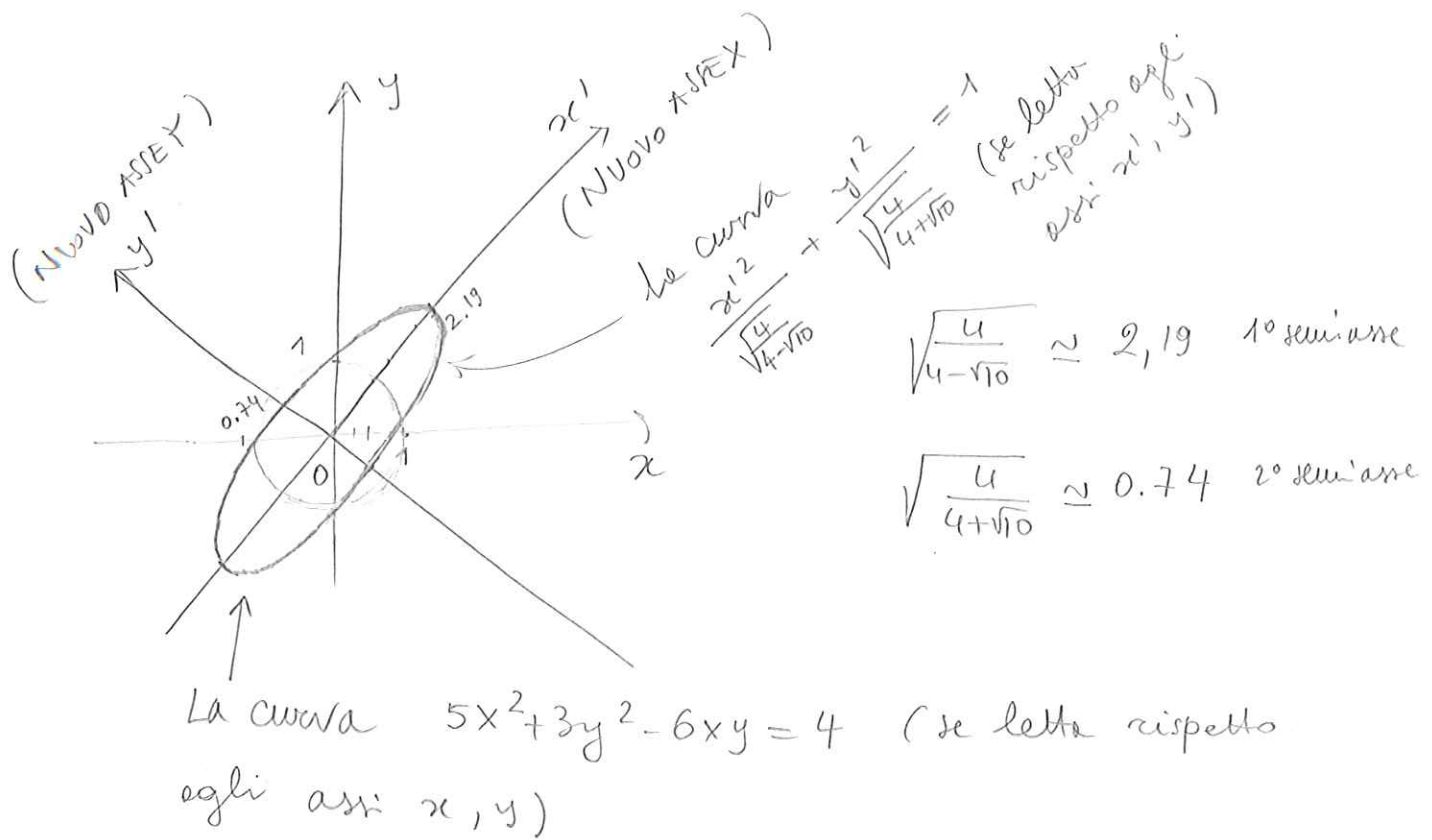
$$x = \frac{3}{1 - \sqrt{10}}$$

e moltiplicando come prima

$$v_2 = \begin{pmatrix} 3/1 - \sqrt{10} \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{1 - \sqrt{10}}\right)^2 + 1}}$$

Comunque a noi interessa solo la direzione! Le

direzioni $\underbrace{\text{di } v_1 \text{ e } v_2}$ sono gli assi di \mathcal{E} .



Generalizzazione Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è matrice def > 0
 $d \in \mathbb{R}$ è fissato e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è fissato \Rightarrow l'insieme

$$E_d = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x-x_0)^T A (x-x_0) = d^2\}$$

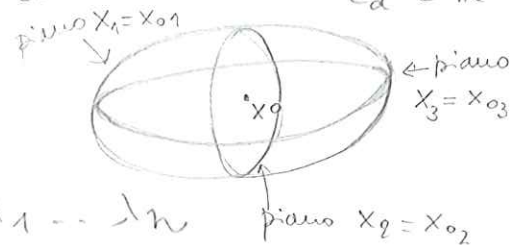
è una ellissoide di centro x_0 , ossia

una superficie $(n-1)$ -dimensionale (una curva se $n=2$, una superficie se $n=3$, un volume se $n=4$ etc)

t.e. tagliandola con gli iperpiani $x_i = x_{0i}$

$\forall i=1, \dots, n$ ad esclusione di due valori per i ,

si ottiene sempre un'ellisse di centro x_0 . $E_d \subset \mathbb{R}^3$



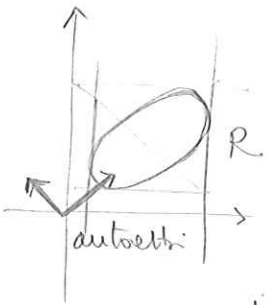
Inoltre se v_1, \dots, v_n sono

autovettori per gli autovalori $\lambda_1 \dots \lambda_n$

allora i gli assi di simmetria per E_d sono uscenti da x_0 e diretti secondo i v_i

2) i semiassi misurano $\sqrt{\frac{d^2}{\lambda_i}}$ (Guarda l'es vsto)

3) il rettangoloide R che ha inscritte E_d e d (rot. // assi cartesiani x_i e definito dagli intervalli



$$x_{0i} - \sqrt{d^2 \lambda_i} \leq x_i \leq x_{0i} + \sqrt{d^2 \lambda_i} \quad i=1 \dots n$$

dove λ_{ii} è l'elemento diagonale i -mo in A^{-1} .

Es. Se $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $d=1 \Rightarrow$

l'ellissoide di centro x_0 associata è

$$(x-1, y-1, z+1) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{cioè}$$

$$2(x-1)^2 + (y-1)^2 + 3(z+1)^2 = 1 \quad \otimes$$

Le sezioni orientat. come gli assi cartesiani

e di misura $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{\frac{1}{1}} = 1$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \quad \text{per cui } R \text{ è descritto da}$$

$$-\sqrt{\frac{1}{2}} \leq x_1 \leq \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad -1 \leq x_2 \leq 1, \quad -\sqrt{\frac{1}{3}} \leq x_3 \leq \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Ora se eseguiamo i calcoli in \textcircled{a} troviamo

$$2(x^2+1-2x) + y^2+1-2y + 3(z^2+1+2z) = 1 \quad \text{ossia}$$

$$2x^2 + y^2 + 3z^2 - 4x - 2y + 6z + 5 = 0$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{p(x,y,z)}$

Da una eq. di questo tipo si può ritrarre A e x_0 ?

A è facile: si guarda solo la parte omogenea di grado 2 ossia $2x^2 + y^2 + 3z^2$ e questo ci fornisce subito $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

E x_0 ? x_0 si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Tu fatti
si trova

$$\begin{cases} 4x - 4 = 0 \\ 2y - 2 = 0 \\ 6z + 6 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

che sono le coord. di x_0 .

Esercizio Ricomporre se sono o no ellipsoidi. Ed
 i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^n e in caso
 affermativo trovare assi di simmetria, ^{centro} misure
 dei semiassi e intervalli di definizione del
 rettangoloide che incornicia Ed

$$1) \left[x - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]^T \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \left[x - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 4 \quad \text{2ui} \\ x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$2) x^2 - 3y^2 + xy = 4$$

$$3) x^2 + 3y^2 - xy = 6$$

$$4) 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1$$

Svolgimento

$$1) \text{ è del tipo voluto con } x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$d = 2$ quindi è un'ellisse purché
 la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ sia definita positiva

$$\text{Gruppo sim. ci da } \xrightarrow{R} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \rightarrow C_2 - 3C_1}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ per cui la matrice è
 indefinita e quindi un
 S'anno di fronte ad una ellisse.

$$2) \quad x^2 - 3y^2 - xy = 4$$

$$\text{e' } (x \ y) \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \quad \text{e non e' ellisse fide}$$

la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & -3 \end{pmatrix}$ non e' def > 0 causa element. diag di segno \neq .

$$3) \quad x^2 + 3y^2 - xy = 6$$

$$(x \ y) \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\sqrt{6})^2$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 3 \end{pmatrix}$ ha val cost.

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr} A \lambda + \det A = \lambda^2 - \underbrace{4}_{\text{tr}} \lambda + \underbrace{(3 - 1/4)}_{\text{det}}$$

per cui ci sono due radici positive \Rightarrow

A e' definita positiva e si trova di fronte ad una ellisse di centro $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

e semiassi $\sqrt{\frac{6}{\lambda_1}}$, $\sqrt{\frac{6}{\lambda_2}}$ dove λ_1, λ_2

sono i due autovalori.

$$p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + \frac{11}{4} = 0$$

$$4\lambda^2 - 16\lambda + 11 = 0 \quad \lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 44}}{4} =$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{20}}{4} = \frac{8 \pm 2\sqrt{5}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Esercizio Espimere

Il polinomio caratteristico d'una matrice 2×2 .

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \\ &= \lambda^2 + a_{11}a_{22} - (a_{11} + a_{22})\lambda - a_{12}a_{21} = \\ &= \lambda^2 - (\text{tr} A)\lambda + \det A\end{aligned}$$

Quindi il primo semiasse misura

$$\sqrt{\frac{6 \cdot 2}{4 + \sqrt{5}}} \quad \text{e il secondo} \quad \sqrt{\frac{6 \cdot 2}{4 - \sqrt{5}}}$$

Gli intervalli di definizione del rettangolo di R sono

$$-\sqrt{6a_{11}} \leq x \leq \sqrt{6a_{11}}$$

$$-\sqrt{6a_{22}} \leq y \leq \sqrt{6a_{22}}$$

dove a_{ii} sono gli element. diag.:

A^{-1} che non conosciamo.

Ma il suo termine di posto 1,1 è

$$a_{11} = \frac{(-1)^{21} A_{11}}{\det A} = \frac{3}{\frac{11}{4}} = \frac{12}{11}$$

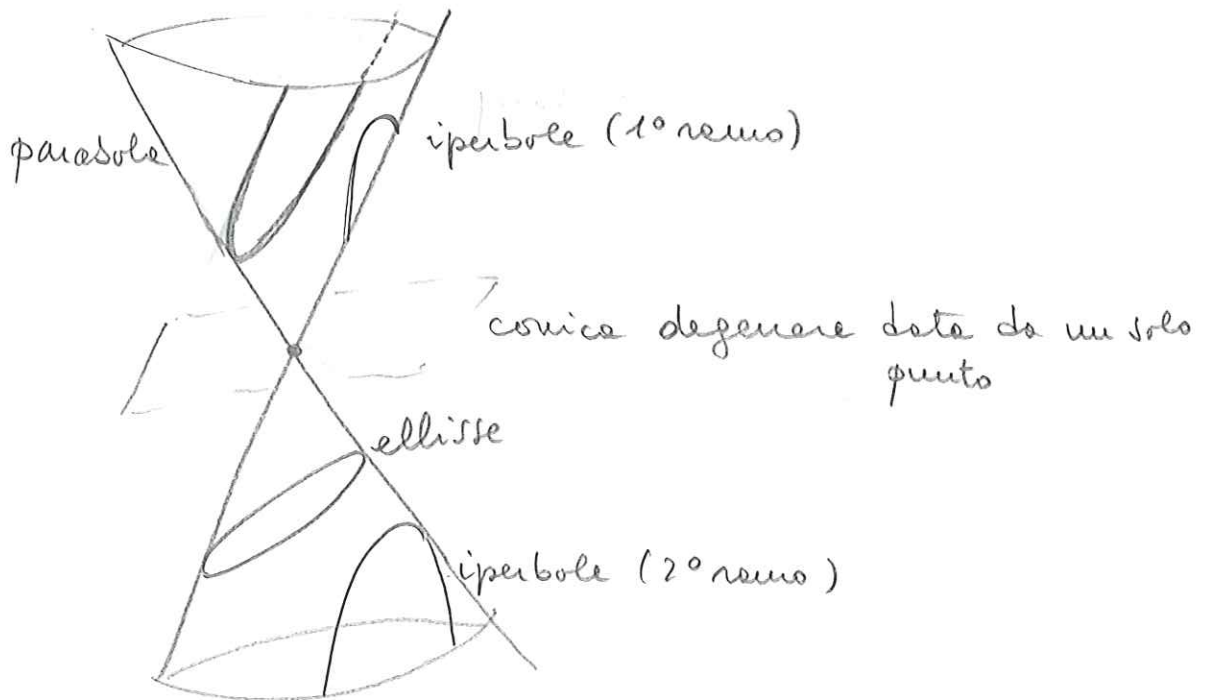
$$\text{quello di posto } 2,2 \text{ è } \frac{(-1)^{22} A_{22}}{\det A} = \frac{1}{\frac{11}{4}} = \frac{4}{11} = a_{22}.$$

Appendice

Riconoscimento delle coniche

TEOREMA

Ogni polinomio p di grado 2 in due variabili rappresenta una conica o sia la sezione di un cono circolare retto a doppia falda con un piano



Tale curva si dice degenerata se si riduce ad un punto o ad una coppia di rette: in questa categoria rientrano anche le coniche completamente immaginarie (cioè prive di punti in \mathbb{R}^2)

quali ad es

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

In sostanza ci sono pol $p(x,y)$ di grado 2 a cui non corrispondono le usuali coniche: ellisse E , parabola P , iperbole I .

Il riconoscimento del caso degenere è facile e una volta visto che lo non è degenere è anche facile controllare se si tratta di E, P, I .




1: tratto di affidarsi a opportune metriche.

Vediamo come: scriviamo $p(x,y) = 0$ dove

$$p(x,y) = b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33}$$

quadrato la matrice $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$ che è

simmetrica e portiamo alla forma quadratica che definisce. Allora accade questo:

- 1) $B \text{ def} > 0$ o $\text{def} < 0$ \Rightarrow caso ellittico (circonferenze se $\lambda_1 = \lambda_2$) 
- 2) B indefinita \Rightarrow caso iperbolico (un autovalore positivo e uno negativo) 
- 3) B semidefinita \Rightarrow caso parabolico 

Diciamo "caso" perché un siamo escludendo la situazione degenere. Es. $x^2 = 1$ rientra

nel caso parabolico può essere $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
ma rappresenta le due rette $x=1$, $x=-1$
e non una parabola.

Comunque il dubbio sulla degenericità è presto
tolto. Si guarda

$$A = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}$$

anch'esso simmetrico e si ha che

$$\text{La } \mathcal{C} \text{ è degenera } \Leftrightarrow \det A = 0$$

Si noti che più velocemente possiamo dire che

$$\begin{array}{ll} \det B > 0 & \text{ caso ellittico} \\ \det B < 0 & \text{ caso iperbolico} \\ \det B = 0 & \text{ caso parabolico} \end{array}$$

ESEMPIO d) Riconoscere la conica \mathcal{C}

$$3x^2 - 2y^2 + xy - 2x + 1 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -2 + (-6 - 1/4) \neq 0$$

dice che non degenera

Ora $B = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ 1/2 & -2 \end{pmatrix}$ e si ha $\det B = -6 - 1/4 < 0$

caso iperbolico. Quindi \mathcal{C} è un'iperbole.

$$b) \quad x^2 + 4y^2 - 3xy = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 0 \\ -3/2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 0 \quad \text{caso degenerato}$$

Ovviamente ora posso chiedermi: esattamente cos'è? //, X, \cdot, \emptyset --

Per questo mi aiuto B: dato che $\det B =$

$$= 4 - \frac{9}{4} > 0 \quad \text{siamo nel caso ellittico} \Rightarrow$$

non siamo di fronte a due rette // o X

e al massimo \mathcal{L} è fatto da un punto

e un punto si vede $(0,0)$.

Ora se $x \neq 0$ l'eq è

$$1 + 4\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

$$\Delta = 9 - 16 < 0 \quad \text{non ha radici reali}$$

Quindi non ci sono sol con $x \neq 0$.

Ma se $x = 0$ ho $4y^2 = 0$ e un'ante $y = 0$

Mostrale $\mathcal{L} = \{(0,0)\}$.