Esercitazione- Algebra Lineare

(Prof.ssa D. Bubboloni)
29 Maggio 2020.
Avete un' ora e mezza a disposizione.

1. Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f([x, y, z]^T) = \begin{pmatrix} ax^2 + bx^2 + x^2 + a^2y \\ bx - y + 2z \\ ay^2 + x - by^2 - 2z \end{pmatrix}$$

per $a, b \in \mathbb{R}$ determinare l'insieme

$$A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : f \text{ e' lineare } \}$$

Trovare nucleo e immagine per gli $(a, b) \in A$. Determinare poi

$$B = \{(a, b) \in A : f \text{ e' biunivoca } \}.$$

2. Scrivere la forma quadratica Q_A su $\mathbb{R}^3$ associata al polinomio omogeneo

$$p(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 + 2xy + 2yz$$

e stabilirne il segno. In base a quanto ottenuto si puo' concludere che esiste $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tale che $p(x_0, y_0, z_0) = 0$? Dire quanto vale $\det(A)$.

3. Trovare il rango della matrice $M \in M_4(\mathbb{R})$ al variare di $b \in \mathbb{R}$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & b & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3b & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}),$$

provare che 2 e' un suo autovalore. Determinarne la molteplicita' algebrica e successivamente determinare l'autospazio V_2 associato all'autovalore 2. Trovare i restanti autovalori e dire se $\mathbb{R}^4$ ammette una base di autovettori.

5. Dare la definizione di sottospazio. Dimostrare che se W e' un sottospazio dello spazio vettoriale V allora $0 \in W$. E' lecito dire che, viceversa, se si ha $W \subseteq V$ tale che $0 \in W$, allora W e' necessariamente un sottospazio?