Algebra Lineare

(Prof.ssa D. Bubboloni)
3 Giugno 2021.

Esame

1. Si consideri la funzione $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$L_A([x,y,z]^T) = \begin{pmatrix} b & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ (b+1) & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

con b parametro reale. Determinare per quale valore di b, il vettore $[1,1,1]^T$ è autovettore di L_A con autovalore 3.

- Per $b = 0$
- Per $b = 0$ e $b = 2$
- Non esistono valori di b per cui questo accada

Trovarne nucleo e immagine per $b = 0$ e dire se f è iniettiva/suriettiva/biunivoca.

- $\mathrm{Im}L_A = \mathbb{R}^3$, $\mathrm{Ker}L_A = \{[0,0,0]\}$ e L_A risulta biunivoca,
- $\mathrm{Im}L_A = \mathrm{Span}\{[0,4,1]^{\mathrm{T}}, [2,-1,0]^{\mathrm{T}}\}$, $\mathrm{Ker}L_A = \{[0,0,0]\}$ e L_A è iniettiva ma non suriettiva
- $\mathrm{Im}L_A = \mathrm{Span}\{[0,4,1]^{\mathrm{T}}, [2,-1,0]^{\mathrm{T}}\}$, $\mathrm{Ker}L_A = \{[1,0,3]\}$ e L_A non è iniettiva né suriettiva

2. Scrivere la forma quadratica Q_A su $\mathbb{R}^3$ associata al polinomio omogeneo

$$p(x,y,z) = x^2 + 4xy - 4xz + 2y^2 + z^2 - 2zy$$

e stabilirne il segno.

- Q_A è indefinita
- Q_A è semidefinita positiva propria
- Q_A è definita negativa

Determinare, se esistono, due vettori $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $X_2 = (x_2, y_2, z_2)$ tali che $p(x_1, y_1, z_1) > 0$ mentre $p(x_2, y_2, z_2) < 0$.

- Esistono perché la forma è indefinita
- Una scelta possibile è $X_1 = (0, 1, 0)$ e $X_2 = (1, 0, 0)$
- Tali X_1 e X_2 non esistono

Stabilire successivamente il segno della forma quadratica

$$Q_B(x, y, z) = Q_A(x, y, z) - 2x^2$$

.

- Q_B è indefinita
- Q_B è semidefinita negativa
- Q_B è negativa

3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -a & -2 & 1 \\ 2 & 4a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

con $a \in \mathbb{R}$. Calcolare det$A$ e usarlo per determinare per quali valori di a la matrice A risulta invertibile.

- det$A = 4a^2 - 2$ e la matrice è invertibile per $a \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
- det$A = 4a^2 - 2$ e la matrice è invertibile per $a \neq 0$
- det$A = 4a^2$ e la matrice è invertibile per $a \neq 0$
- det$A = 4a^2 - 2$ e la matrice è invertibile per $a \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Determinare l'inversa di A per $a = 0$

- Si ha
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
- Si ha
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
- L'inversa di A non esiste

4. Risolvere il seguente sistema di variabili reali x, y, z

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

L'insieme S_1 delle soluzioni è dato da:

- Si ha $S_1 = \text{Span}\{[1,3,2]^T\}$ ed è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$
- Si ha $S_1 = \mathbb{R}^3$ e S_1 è un sottospazio
- Si ha $S_1 = \text{Span}\{[1,3,2]^T\}$ ma non si tratta di un sottospazio di $\mathbb{R}^3$
- Si ha $S_1 = \{[0,0,0]^T\}$ perché tutti i termini noti del sistema sono 0.

Si consideri ora

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y - 3z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

e l'insieme S_2 delle sue soluzioni. Valgono i seguenti fatti

- Si ha $S_2 = S_1$
- Si ha S_2 sottoinsieme proprio di S_1 a causa della evidente equazione aggiunta
- Si ha $S_1 \cap S_2 = \{[0,0,0]^T\}$

5. Si consideri la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Trovare $sp(A)$ e le molteplicità degli autovalori.

- $sp(A) = \{1/2, 3\}$ con $m(1/2) = 1, m(3) = 2$
- $sp(A) = \{1, 3\}$ con $m(1) = 1, m(3) = 2$
- $sp(A) = \{3\}$ on $m(3) = 3$

Si consideri ora l'applicazione lineare L_A. Si può affermare, senza fare calcoli che esiste una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di L_A?

- Sì, per il teorema spettrale
- Non si può affermare per via teorica, bisogna controllare che $\dim V_3 = 2$ e che $\dim V_{1/2} = 1$

- Sicuramente no
- Non si può affermare per via teorica, bisogna controllare che $\dim V_3 = 2$ e che $\dim V_1 = 1$

Determinare l' autospazio associato all'autovalore 3.

- $V_3 = Span\{[1, 2, 0]^T, [0, 0, 1]^T\}$
- $V_3 = Span\{[0, 0, 1]^T\}$
- $V_3 = Span\{[1, 2, 0]^T\}$