Soluzioni dettagliate della prova intermedia I-2019

Le soluzioni sono esplicitate per la Fila 1. I procedimenti sono identici per la fila 2. Gli specifici risultati sono riportati in blu.

1. Esercizio 1

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \; Span\{v_1, v_2, v_3\} = Span\{v_1, v_4\}?$$

Svolgimento. Si nota che $v_4 = v_1 + v_2$. Quindi se un vettore e' combinazione lineare di v_1, v_4 lo e' anche di v_1, v_2, v_3. Pertanto si ha $Span\{v_1, v_4\} \subseteq Span\{v_1, v_2, v_3\}$. Notiamo ora che v_1, v_2, v_3 non sono indipendenti. Infatti se scriviamo

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$$

con 0 vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora

$$\begin{cases} a = 2c \\ b = -3c \\ c \in \mathbb{R} \end{cases} .$$

Ne segue, esplicitamente, che

$$2v_1 - 3v_2 + v_3 = 0.$$

Quindi si ha $Span\{v_1, v_2, v_3\} = Span\{v_1, v_2\}$ e $\dim Span\{v_1, v_2, v_3\} = 2$. Poiche' anche $\dim Span\{v_1, v_4\} = 2$ siamo di fronte a due spazi vettoriali uno incluso nell'altro e di uguale dimensione. Ne segue che $Span\{v_1, v_2, v_3\} = Span\{v_1, v_4\}$.

2. Esercizio 2

Punto 1. Il vettore

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

è combinazione lineare di

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

Svolgimento 1. Dobbiamo cercare $a, b, c \in \mathbb{R}$, tali che

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = v,$$

ovvero

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b + c \\ a + b \\ a + c \\ a + 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Dalla precedente uguaglianza abbiamo il seguente sistema

$$\begin{cases} a - b + c = 2 \\ a + b = 3 \\ a + c = 4 \\ a + 2b = 5 \end{cases}$$

Usiamo l'algoritmo di Gauss per risolverlo. Consideriamo la matrice completa associata al sistema:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{array} \right).$$

Usando EG, con facili calcoli, si ottiene

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

Infatti

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Punto 2. $\{v_1, v_2, v_3\}$ formano una base di $\mathbb{R}^4$? No, perchè $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 4 e quindi servono quattro vettori indipendenti per avere una base di $\mathbb{R}^4$.

Come trovare un vettore da aggiungere a $\{v_1, v_2, v_3\}$ per avere una base di $\mathbb{R}^4$?

Svolgimento 2. Prima di tutto dimostriamo che v_1, v_2, v_3 sono indipendenti: se esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

allora

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ a + b = 0 \\ a + c = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

La risoluzione del sistema è analoga a quella del punto precedente.
Questo ci permette di dire che basta trovare un vettore $w \in \mathbb{R}^4$ che non sia combinazione lineare di $\{v_1, v_2, v_3\}$ affinché $\{v_1, v_2, v_3, w\}$ sia una base di $\mathbb{R}^4$.

Dato un vettore generico $w = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^4$, quali condizioni necessarie e sufficienti dobbiamo avere su x_1, x_2, x_3, x_4 affinchè w sia/non sia combinazione lineare di v_1, v_2, v_3?

Se w è combinazione lineare di v_1, v_2, v_3, allora esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $av_1 + bv_2 + cv_3 = w$. Impostiamo il sistema e consideriamo la matrice completa associata:

$$\begin{cases} a - b + c = x_1 \\ a + b = x_2 \\ a + c = x_3 \\ a + 2b = x_4 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \\ 1 & 2 & 0 & x_4 \end{array}\right)$$

Applichiamo di nuovo il metodo di Gauss. Usiamo EG con moltiplicatori: $-1, -1, -1, -1$ ottenendo la nuova matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x_1 \\ 0 & 2 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 3 & -1 & x_4 - x_1 \end{array}\right)$$

Facciamo uno scambio riga per lavorare con un pivot 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 2 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 3 & -1 & x_4 - x_1 \end{array}\right)$$

Usiamo ora moltiplicatori $-2, -3$ ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & -1 & x_2 - x_1 - 2(x_3 - x_1) \\ 0 & 0 & -1 & x_4 - x_1 - 3(x_3 - x_1) \end{array}\right)$$

ossia

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & -1 & x_2 + x_1 - 2x_3 \\ 0 & 0 & -1 & x_4 + 2x_1 - 3x_3 \end{array}\right).$$

Infine usiamo EG con moltiplicatore -1 ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & -1 & x_2 + x_1 - 2x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \end{array}\right).$$

Dalla quarta riga si ottiene la condizione di compatibilita' $0 = x_1 - x_2 - x_3 + x_4$.
Questo significa che w NON è combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 se e solo se $0 \neq x_1 - x_2 - x_3 + x_4$. Un qualsiasi vettore w con questa seconda proprietà permette di dire che $\{v_1, v_2, v_3, w\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

Per esempio $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Fila 2:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$$

Condizione di compatibilita' identica $0 = x_1 - x_2 - x_3 + x_4$.

3. ESERCIZIO 3

Studiare al variare di $a \in \mathbb{R}$, le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} ax - y - z = a + 2 \\ 3y + x = -3z \\ x = 2z - ay \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{Forma normale} \quad \begin{cases} ax - y - z = a + 2 \\ x + 3y + 3z = 0 \\ x + ay - 2z = 0 \end{cases}$$

Svolgimento. Scriviamo la matrice completa del sistema riorganizzando le righe in modo da confinare il parametro nelle ultime righe. La matrice completa del sistema e' allora

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & a & -2 & 0 \\ a & -1 & -1 & a+2 \end{array} \right)$$

Usiamo EG con moltiplicatori: -1 e $-a$ ottenendo la nuova matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & a-3 & -5 & 0 \\ 0 & -1-3a & -1-3a & a+2 \end{array} \right)$$

Volendo rinviare il problema della presenza del parametro a nell'entrata della matrice che vorremmo usare come pivot, facciamo uno scambio fra colonna 2 e colonna 3. Ricordiamoci che le variabili sono quindi riordinate x, z, y. Otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & a-3 & 0 \\ 0 & -1-3a & -1-3a & a+2 \end{array} \right)$$

Cambio ora segno nelle ultime due equazioni

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 3-a & 0 \\ 0 & 1+3a & 1+3a & -a-2 \end{array} \right)$$

Questa operazione non era obbligata ma migliora la leggibilita' ed aiuta a non commettere errori di calcolo. Usiamo 5 come pivot e quindi consideriamo il moltiplicatore $-\frac{1+3a}{5}$ ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 3-a & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1+3a)(a+2)}{5} & -a-2 \end{array} \right)$$

Infatti

$$(1+3a) - \frac{1+3a}{5}(3-a) = \frac{5(1+3a) - (1+3a)(3-a)}{5} = \frac{(1+3a)(5-3+a)}{5} = \frac{(1+3a)(a+2)}{5}.$$

La matrice e' a scala! Ha due pivot certi:1 e 5. Inoltre $(1+3a)(a+2)$ e' un pivot se e solo se $a \neq -\frac{1}{3}$ e $a \neq -2$. Pertanto, se $a \neq -\frac{1}{3}$ e $a \neq -2$ si hanno tre pivot e soluzione unica.

Vediamo i casi critici. Se $a = -\frac{1}{3}$ l'ultima riga diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -5/3 \end{array} \right)$$

che esprime una equazione impossibile. Quindi anche il sistema e' impossibile.

Se $a = -2$ l'ultima riga diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

che esprime una identita' e viene eliminata. La matrice si riduce a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

ossia, dividendo per 5 l'ultima equazione, a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Ci sono due pivot e una variabile libera (y, a causa dello scambio colonna usato). Dall'ultima equazione si ricava $z = -y$ e dalla prima $x + 3y - 3y = 0$ da cui $x = 0$. L'insieme delle soluzioni e' quindi

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\}$$

Fila 2: Stessa discussione; insieme delle soluzioni per $a = 2$ dato da

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\}$$

Ricapitolazione.

- Se $a \neq -\frac{1}{3}$ e $a \neq 2$, allora si ha soluzione unica.
- Se $a = -\frac{1}{3}$, il sistema è impossibile.
- Se $a = -2$, allora il sistema ha ∞^1 soluzioni

Nel caso $a = -2$, il sistema è omogeneo e ci sono infinite soluzioni che abbiamo trovato. Esse cosituiscono l'insieme $S = Span \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ e quindi sono un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

4. Esercizio 4

Risolvere il seguente sistema nelle 5 variabili reali x_i ed esprimere le soluzioni come traslato di uno *span*.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_4 + x_2 = 1 + x_1 \\ x_3 = x_1 + x_4 + 3x_5 \end{cases}$$

Svolgimento.

Scriviamo il sistema in forma normale

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

e passiamo alla sua matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Riduciamo a scala usando moltiplicatori: $1, 1$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Eseguo uno scambio riga per avere un moltiplicatore piu' comodo

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Facciamo ancora EG con moltiplicatore -2

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

La matrice e' a scala. Abbiamo 3 pivot:$1, 1, -3$ e variabili libere x_4, x_5. Dall'ultima equazione si ricava $x_3 = \frac{2x_4+7x_5}{3}$. Ora dalla seconda si ricava $x_2 + 2\,\frac{2x_4+7x_5}{3} - 4x_5 = 1$, ossia $x_2 = -\frac{4}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 + 1$. Infine dalla prima $x_1 = -\frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5$.

Quindi l'insieme delle soluzioni e' dato da

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 \\ -\frac{4}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 + 1 \\ \frac{2x_4+7x_5}{3} \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} : x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= Span \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si ha $\dim S = 2$ perche' i vettori che generano $Span \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sono indipendenti.

Fila 2: l'insieme delle soluzioni e' dato da

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 \\ \frac{2}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 + 1 \\ \frac{2x_4+7x_5}{3} \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} : x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= Span \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. Esercizio 5

Siano $2x^3 - x^2,\ 2x - 4,\ -x^3 + x,\ x^2 + 3x \in \mathbb{R}^{(3)}[x]$. Dire se sono indipendenti, se formano una base di $\mathbb{R}^{(3)}[x]$ e trovare, eventualmente, le coordinate del vettore $6x^3 - x$ rispetto a $2x^3 - x^2,\ 2x - 4,\ -x^3 + x,\ x^2 + 3x$.

Svolgimento.

- Indipendenti. Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che
$$a(2x^3 - x^2) + b(2x - 4) + c(-x^3 + x) + d(x^2 + 3x) = 0,$$
che è equivalente a
$$(2a - c)x^3 + (-a + d)x^2 + (2b + c + 3d)x - 4b = 0$$
dove lo 0 finale indica il polinomio nullo, ossia la funzione costante 0. Quindi, per il principio di identita' dei polinomi, abbiamo
$$\begin{cases} 2a - c = 0 \\ -a + d = 0 \\ 2b + c + 3d = 0 \\ -4b = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2a - c = 0 \\ -a + d = 0 \\ c + 3d = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$
Quindi, avendo immediatamente ricavato b, possiamo limitarci a considerare il sistema lineare di tre equazioni e tre incognite
$$\begin{cases} -a + d = 0 \\ 2a - c = 0 \\ c + 3d = 0 \end{cases}$$
avente matrice completa
$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right).$$
Usiamo EG con moltiplicatori $2, 0$ ottenendo
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right).$$
Facciamo un altro passo con EG con moltiplicatore 1 ottenendo
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array} \right).$$
Abbiamo ottenuto una matrice a scala che risulta triangolare non singolare. Quindi il sistema ha soluzione unica e come tale, necessariamente tale soluzione èla banale. Concludiamo che i quattro vettori sono indipendenti, perchè l'unica soluzione del sistema è $a = 0, b = 0, c = 0, d = 0$.

- Siccome sono indipendenti e $dim(\mathbb{R}^{(3)}[x]) = 4$, allora risulta che
$$\mathcal{B} = \{2x^3 - x^2, 2x - 4, -x^3 + x, x^2 + 3x\}$$
è una base.

- Sappiamo che $\exists\, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ unici tali che
$$a(2x^3 - x^2) + b(2x - 4) + c(-x^3 + x) + d(x^2 + 3x) = 6x^3 - x.$$
Per trovarli risolviamo il sistema associato, applicando di nuovo il metodo di Gauss. Le soluzioni sono
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -4 \\ d = 1. \end{cases}$$

Infatti vale

$$1\,(2x^3 - x^2) + (-4)(-x^3 + x) + 1\,(x^2 + 3x) = 6x^3 - x.$$

Quindi le coordinate di $6x^3 - x$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono date dal vettore

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Fila 2: Le coordinate di $6x^3 - x$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono date dal vettore

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

6. Esercizio 6

Provare che i seguenti vettori di $\mathbb{Q}^4$,

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

sono dipendenti.

Svolgimento.

Osserviamo che $v_4 = -v_1 - v_2 + 0v_3$, quindi $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sono dipendenti essendo

$$1v_1 + 1v_2 + 0v_3 + 1v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e i coefficienti usati non tutti 0. Il fatto che v_2 sia esprimibile come combinazione lineare di v_1, v_3, v_4 risulta immediatamente dalla relazione trovata sopra perche' puo' scriversi

$$v_2 = -v_1 - v_4.$$

Nella relazione trovata sopra v_3 non è esprimibile come combinazione lineare degli altri tre perché non possiamo isolare v_3 dividendo per 0. Questo non basta per dire che v_3 non sia esprimibile come combinazione lineare degli altri perche' potrebbero esserci altri legami lineari che non vediamo. Per comprendere completamente la situazione dobbiamo capire tutte le soluzioni di $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = 0$. Il sistema associato a tale richiesta ha matrice completa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Dovendo considerare il problema della descrizione di

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 |\ \exists\, a_i \in \mathbb{R},\ \text{tali che} \sum_{i=1}^{4} a_i v_i = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right\}.$$

esaminiamo direttamente il sistema di matrice completa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 4 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & -2 & y \\ 2 & -1 & -1 & -1 & z \\ 1 & 1 & 1 & -2 & t \end{array}\right)$$

di cui poi vedremo il caso particolare in cui $x = y = z = t = 0$.

Usiamo EG con moltiplicatori:$1, 2, 1$ ottenendo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 4 & 1 & x \\ 0 & 1 & 5 & -1 & y+x \\ 0 & -1 & 7 & 1 & z+2x \\ 0 & 1 & 5 & -1 & t+x \end{array}\right)$$

Proseguiamo con EG con moltiplicatori:$1, -1$ ottenendo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 4 & 1 & x \\ 0 & 1 & 5 & -1 & y+x \\ 0 & 0 & 12 & 0 & z+3x+y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-y \end{array}\right)$$

Il sistema ammette soluzioni se e solo se $t - y = 0$. Quindi

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si ha $S \neq \emptyset$ perche' contiene il vettore nullo. Inoltre $S \subsetneq \mathbb{R}^4$ perche' $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \notin S$.

Nel caso in cui $x = y = z = t = 0$ il sistema fornisce

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Essendoci una sola variabile libera, abbiamo che in effetti, il legame lineare trovato e' l'unico presente. In effetti una volta eliminata la quarta equazione che esprime una identita', abbiamo che a_4 e' libera, $a_3 = 0$, $a_2 = a_4$ e $a_1 = a_4$. In altre parole si ha, per ogni $a_4 \in \mathbb{R}$ la seguente uguaglianza

$$a_4 v_1 + a_4 v_2 + 0 v_3 + a_4 v_4 = 0.$$

Per $a_4 = 0$ tale uguaglianza non e' significativa perche' si riduce a $0 = 0$; per $a_4 \neq 0$ invece, dividendo per a_4 si ottiene

$$v_1 + v_2 + 0 v_3 + v_4 = 0$$

che e' la dipendenza lineare che ben conosciamo. A questo punto, in maniera inequivocabile, possiamo dire che v_3 non e' combinazione lineare dei restanti.

Fila 2: Il sistema ammette soluzioni se e solo se $-x - z + t = 0$. Quindi

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ x+z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$