Intermedia 2 (2014), Algebra Lineare e Geometria Analitica

(Dott.ssa D. Bubboloni)
15 Dicembre 2014

Avete due ore e mezza di tempo. Per ottenere punteggio pieno è sufficiente risolvere correttamente 4 esercizi scelti fra i 6 presenti. Curate le motivazioni alle vostre risposte.

1. Date le due applicazioni lineari $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definite da:

$$L(x, y)^T = (3x-y, x+4y, -5x+6y)^T \qquad M(x', y', z')^T = (2x'-y'+z', -2x'+y'-z')^T$$

determinare:

1) l'equazione cartesiana di ImL;

2) l'equazione cartesiana di $KerM$;

3) Provare che $ImL = KerM$ e dire, di conseguenza, chi è la composizione $M \circ L$.

2. Data la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2b-1 & 0 \\ b+3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

determinare $b \in \mathbb{R}$ tale che B sia simmetrica e, per tale b, dire se esiste una matrice C tale che $C^T BC$ sia diagonale. In caso affermativo determinare tale C. Alla luce di quanto ottenuto che segno ha la forma quadratica $Q(X) = X^T BX$?

3. In $\mathbb{R}^4$, scrivere l'equazione parametrica e cartesiana della retta r passante per il punto $P = (1, 2, 1, 0)$ e ortogonale all' iperpiano $3x - 2y + 5z - 4t = 8$.

4. Trovare il segno della forma quadratica su $\mathbb{R}^3$ definita da $Q(X) = X^T AX$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Scrivere esplicitamente il polinomio omogeneo $Q(X)$, dove $X = (x, y, z)^T$ è il generico vettore di $\mathbb{R}^3$. Dire se esistono, $X, Y \in \mathbb{R}^3$ tali che $Q(X) > 0$, $Q(Y) < 0$.

5. Determinare, via il procedimento di ortogonalizzazione di Gram Schmidt, una base ortonormale per il sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$W = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 28 \end{pmatrix}\}$$

Dire, in particolare, quanto vale, $dimW$.

Suggerimento: poiché il procedimento di ortogonalizzazione è gravoso dal punto di vista del calcolo, può essere conveniente usarlo dopo aver estratto una base dalla lista...

6. Trovare autovalori ed autovettori per l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x + y - z \\ 3x - 3y + 3z \end{pmatrix}$$

Alla luce di quanto ottenuto, si può dire che L ammette una base di autovettori?