1. $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\-1 & 1 & 2\\0 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

è di tipo L_A quindi è lineare

Ker f : $\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 2 & 0\\0 & 1 & 4 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 2 & 0\\2 & -1 & 0 & 0\\0 & 1 & 4 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{2^\circ}$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 2 & 0\\0 & 1 & 4 & 0\\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{4} & \cancel{0}\end{array}\right)$ 2 pivot
1 v.L (z)

dim Ker f = 1 Trovo una base $\boxed{z=1}$, $\boxed{y=-4}$

$-x-4+2=0$, $\boxed{x=-2}$

$$\boxed{\text{Ker } f = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\-4\\1\end{pmatrix}\right\}}$$

Quanto fatto mostra anche

$$\boxed{\text{Im } f = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}}$$ con $\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$

base per Im f.

Essendo Im f di dimensione $2 \neq \dim \mathbb{R}^3 = 3$

si ha f non suriettiva $\Rightarrow$ non biunivoca.

Autovalori

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)(4-\lambda)-2\right] + \left[-(4-\lambda)\right]$$

$$= (2-\lambda)\left[4-\lambda-4\lambda+\lambda^2-2\right] -4+\lambda =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+2) -4+\lambda =$$

$$= 2\lambda^2 - 10\lambda \cancel{+4} - \lambda^3$$
$$+5\lambda^2 - 2\lambda \cancel{-4}$$
$$+ \lambda = 7\lambda^2 - \lambda^3 - 11\lambda =$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 7\lambda + 11)$$

un autovalore è 0 (lo sapevamo)

$\lambda^2 - 7\lambda + 11 = 0 \qquad \lambda = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-44}}{2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$\boxed{sp(A) = \left\{ 0, \frac{7-\sqrt{5}}{2}, \frac{7+\sqrt{5}}{2} \right\}}$$

2. L'Incompleta $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & 2a \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ ha

determinante dato da $-7-4a-[7a+2] =$
$= -7-4a-7a-2 = -11a-9$

$\det A = 0$ per $11a + 9 = 0$, $a = -9/11$

<u>Se $a \neq -9/11$</u> $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|b) = 3$ <u>$\Rightarrow$ sol unica</u>

• Caso $a = -9/11$: $\operatorname{rank} A \leq 2$ e la matrice è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -9/11 & -1 \\ 1 & -1 & -18/11 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Sicuramente $\operatorname{Rank} A = 2$ perché $\det\begin{pmatrix} 1 & -9/11 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$

Vediamo se invece $\operatorname{Rank}(A|b) = 3$ oppure $\operatorname{rank}(A|b) = 2$.

$$(A|b) = \begin{bmatrix} 1 & -9/11 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -18/11 & 35/11 \\ 0 & 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

perché $\frac{-9}{11} + 4 = \frac{-9+44}{11} = \frac{35}{11}$

Dato che il rango non cambia moltiplicando una riga per un numero $\neq 0$ lavoriamo su

$$\begin{bmatrix} 11 & -9 & -11 & 33 \\ 11 & -11 & -18 & 35 \\ 0 & 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$ Usiamo EG

$$\begin{bmatrix} 11 & -9 & -11 & 33 \\ 0 & -2 & -7 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 11 & -9 & -11 & 33 \\ 0 & -2 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

ci sono 3 pivot $\Rightarrow \operatorname{rank}(A|b) = 3 \neq 2 \Rightarrow$ nessuna soluzione per $\boxed{a = -9/11}$

3. Per $a = 1$ è

$$f_a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - x + 3x^2 - y \\ - x + y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4x^2 - x - y \\ x + y \end{pmatrix}$$

e $f_a\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 2 f_a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ basta a concludere f_1 non lineare.

Infatti $f_a\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$2 f_a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Se $a = -3$ si ha

$$f_{-3}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{-3x^2} + 3x + \cancel{3x^2} - y \\ - x + y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3x - y \\ -x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

che è lineare.

Se $a \neq -3$ si può rifare quanto fatto per $a = 1$ e scoprire f_a non lineare.

Quindi l'unico a t.c. f_a è lineare è $\boxed{a = -3}$

Vediamo gli autovalori per f_{-3}

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)-1$$
$$= 3-3\lambda-\lambda+\lambda^2-1 =$$
$$= \lambda^2-4\lambda+2$$

$\lambda^2-4\lambda+2=0$, $\lambda = 2 \pm \sqrt{4-2} = 2\pm\sqrt{2}$

Sono due distinti $\Rightarrow$ esiste base di autovettori.

4. $$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

guardando la diagonale ho che $Q_A(x) = x^T A x$ sicuramente non è semidefinita negativa e può essere solo semidef positiva / indefinita. Per decidere si deve capire il segno degli autovalori

$$p_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & 2-\lambda & 3 \\ -4 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\left[(2-\lambda)(1-\lambda)-9\right] - 2\left[2-2\lambda+12\right]$$
$$-4\left[6+4(2-\lambda)\right] = (2-\lambda)\left[\underbrace{2\overbrace{-2\lambda-\lambda}^{-3\lambda}+\lambda^2-9}_{-7}\right]$$
$$-2(-2\lambda+14)-4(6+8-4\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-7)$$
$$+4\lambda-28-56+16\lambda =$$

$$= \begin{array}{l} 2\lambda^2 - 6\lambda - 14 - \lambda^3 \\ +3\lambda^2 + 7\lambda \\ \quad +20\lambda - 84 \end{array}$$

$$= -\lambda^3 + 5\lambda^2 + 21\lambda - 98$$

variazioni : 2 $\Rightarrow$ 2 radici +

Esiste anche una radice − $\Rightarrow$ $\boxed{Q_A \text{ INDEFINITA}}$

$\Rightarrow$ falso che $p(x,y,z) > 0 \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$.

5. $$p_M(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (2-\lambda) \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 3-\lambda \end{bmatrix} - 2 \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(2-\lambda)\underbrace{\left[(3-\lambda)^2-9\right]}_{\cancel{9}+\lambda^2-6\lambda-\cancel{9}} - 2\cdot 2\left[(3-\lambda)^2-9\right] =$$

$$= \cancel{\left[(3-\lambda)^2-9\right]}(\lambda^2-6\lambda)\left[(2-\lambda)^2-4\right] =$$

$$= \lambda(\lambda-6)(\cancel{4}+\lambda^2-4\lambda-\cancel{4}) =$$

$$= \lambda(\lambda-6)\lambda(\lambda-4) = \lambda^2(\lambda-6)(\lambda-4)$$

$m(0) = 2, \quad m(6) = 1, \quad m(4) = 1$

M è simmetrica quindi C esiste sicuramente
e ha per colonne una base ortonormale di autovettori.

$$V_0 : \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & | & 0 \end{bmatrix}^{-1} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & t & & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & | & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 3 & 3 & | & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{3} & | & \cancel{0} \end{bmatrix} \end{array}$$

2 v.L. ~~y~~ e t

le sol sono $z = -t$, $x = -y$

$$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ -t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; y, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Si nota che $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono autovettori ortogonali. Per la norma 1 basterà normalizzarli

$$\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2} = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|$$

Quindi

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6. $p_A(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$
$= (2-\lambda)^2(1-\lambda)^2$

$Sp(A) = \{1,2\}$ $\quad m(1) = 2 = m(2)$

$$V_1 : \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

$\dim V_1 = 1 < m(1)$
$\Rightarrow$ la base di autovettori non c'è.

7. Se avessimo A, B con

$AB = \mathrm{Diag}(3,4,-2)$ e $BA = \mathrm{Diag}(-4,-3,2)$

avremo che

$\det(AB) = 3 \cdot 4 \cdot (-2) = -24$ e anche
$\det(BA) = -4 \cdot (-3) \cdot 2 = 24$

Ma per Binet $\det(AB) = \det A \cdot \det B =$
$= \det B \cdot \det A = \det(BA)$

quindi $-24 = 24$ contraddizione.

Ora pensiamo alle possibilità

$AB = \mathrm{Diag}(3,1,+2)$ e $BA = \mathrm{Diag}(-1,-1,6)$

Usando $tr(AB) = tr(BA)$ avremo che

$tr(AB) = 3+1+2 = 6 = tr(BA) = -1-1+6 = 4$

contraddizione. $\Rightarrow$ anche questo non accade