II intermedia di Algebra Lineare e Geometria Analitica

(Dott.ssa D. Bubboloni) 21 Dicembre 2016

Avete due ore e mezzo a disposizione. Giustificate con cura le vostre risposte. Il punteggio pieno si ottiene con 5 esercizi. Ma potete svolgerne anche 6 per compensare eventuali errori in quelli scelti.

1. Provare che la funzione $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2$ definita da

$$f(x, y, z) = (|x| - y, y - z)$$

non è lineare.

Provare che invece è lineare la funzione $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$L = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ y - z \\ x - 5y + 4z \\ -x + y \end{pmatrix}$$

Trovare nucleo e immagine di L. Dire se L risulta iniettiva/suriettiva/biunivoca.

2. Trovare il rango di

$$A = \begin{pmatrix} b & 2b & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & b+1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

al variare di $b \in \mathbb{R}$. In base all'analisi effettuata dire, sfruttando il teorema di Rouchè-Capelli, per quali b è compatibile il sistema

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. Dopo aver provato che

$$r = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; : \; x - y + z = 1, x + y - 2z = 4\}$$

è una retta, si determini ~~la~~ una retta s passante per $A = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ e avente direzione ortogonale ad r. Determinare la posizione reciproca delle due rette r ed s decidendo se sono sghembe o incidenti.

4. Trovare lo spettro della matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{7} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dire se esistono due autovettori relativi ad autovalori distinti di A che siano fra loro ortogonali. In caso affermativo mostrarli. Esibire una matrice diagonale D tale che per una opportuna matrice invertibile e ortogonale C si abbia $C^{-1}AC = D$ (non è richiesto di esplicitare C). Tenuto conto di quanto ottenuto che segno ha la forma quadratica Q_A associata ad A?

5. Determinare il segno della forma quadratica su $\mathbb{R}^3$ definita da $Q(X) = X^T AX$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Scrivere esplicitamente il polinomio omogeneo $Q(X)$, se $X = (x_1, x_2, x_3)^T$. Dire se si può concludere che esistono $X, Y \in \mathbb{R}^3$ tali che $Q(X) > 0, Q(Y) < 0$.

6. Dire se è vero che per ogni $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ valga:

1) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

2) $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$.

3) $\det(\lambda A) = \lambda^3 \det(A)$.

Se è noto che $\det(A + B) = 4$ e $\det(A) = 6$, dire quanto vale $\det(AB + A^2)$. Si può concludere che la matrice $AB + A^2$ sia invertibile?

1. $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x| - y \\ y - z \end{pmatrix}$

non è lineare. Infatti

$$f\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = f\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\neq f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Invece $L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il

~~è lineare perché~~ prodotto righe per colonne fra la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e il vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Pertanto $L = L_A$ e quindi è lineare.

Troviamo l'immagine e il nucleo

Si può trovare il nucleo e vedere dove cadono i pivot ottenendo anche $\operatorname{Im} L$ come Span delle colonne con pivot.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -9/2 & 9/2 \\ 0 & +1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-1} \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-1} \end{pmatrix}$$

z libera

$\dim \ker L = 1$

$y = z$; $2x - z - z = 0$ dà $x = z$

$$\ker L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\operatorname{Im} L = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

L non è iniettiva perché $\ker L \neq 0$

L non è suriettiva perché $\dim \operatorname{Im} L = 2$ $\neq 4 = \dim \mathbb{R}^4$.

Di conseguenza L non è neanche biunivoca.

$$\det\begin{pmatrix} b & 2b & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & b+1 & 1 \end{pmatrix} = -2 \begin{vmatrix} b & 2b \\ 2 & b+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & 2b \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2\,[b^2+b-4b] + b - 8b$$

$$= -2(b^2-3b)+b-8b$$

$$= -2b^2+6b-7b =$$

$$= -2b^2-b = -b(2b+1)$$

per $b \neq 0, -1/2$, rango $A = 3$

Per $b = 0$, rango $A \leq 2$: vediamolo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c'è un minore 2×2 non nullo $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

quindi rango $A = 2$

per $b = -1/2$: $\begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

anche qui c'è un minore 2×2 non nullo $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ $\cancel{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix}}$

quindi rango $A = 2$

Pertanto: $\boxed{\begin{array}{l} \text{rango } A = 3 \text{ per } b \neq 0, -1/2 \\ \text{rango } A = 2 \text{ per } b = 0, -1/2 \end{array}}$

Se $b \neq 0, -1/2$ il rango completa è comunque 3 $\Rightarrow$ sol. unica per $A\,X = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$

Se $b = 0$ il rango completa $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$ è 3 prendendo il det della matrice ottenuta eliminando la 1ª colonna ⇒ per R-C. il sistema è incompatibile.

Se $b = -1/2$ si ha

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1/2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -1/2 \\ 2 & 1/2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

e $\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1/2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} =$

$$= -\left(-2 + 1/2\right) \cancel{+1} - \cancel{1} =$$

$$\neq 0$$

pertanto anche in questo caso i ranghi sono ≠ e il sistema è incompatibile

3. Per provare che $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - 2z = 4 \end{cases}$ è una retta

dobbiamo verificare che il sistema ha ∞^1 sol.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{-1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

z è libera.

Scriviamo le soluzioni in modo da individuare la direzione di r

$2y = 3z + 3$ fornisce $y = \frac{3}{2}z + \frac{3}{2}$

$x - \frac{3}{2}z - \frac{3}{2} + z = 1$ fornisce $x = \frac{z}{2} + \frac{5}{2}$

$$r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z/2 + 5/2 \\ 3/2\, z + 3/2 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

quindi r è una retta di direzione

$$v = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le direzioni ortogonali a v sono le $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ t.c.

$$\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \qquad \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta + \gamma = 0$$

Ci sono ∞^2 scelte possibili: le sol di $\alpha + 3\beta + 2\gamma = 0$

ossia $\begin{pmatrix} -3\beta - 2\gamma \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ al variare di β e $\gamma \in \mathbb{R}$.

Scegliamone una fissando γ e β. Ad es

$\gamma = \beta = 1$ dà $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$s: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Troviamo $r \cap s$:

$$z \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

è compatibile? Studio il sistema di completa

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1/2 & 5 & -11/2 \\ 3/2 & -1 & 5/2 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{-\frac{3/2}{1/2} = -3 \\ -2}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1/2 & 5 & -11/2 \\ 0 & -16 & 38/2 = 19 \\ 0 & -11 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{+11}{+16}} \left(\begin{array}{cc|c} 1/2 & 5 & -11/2 \\ 0 & -16 & 19 \\ 0 & 0 & 13 - \frac{11}{16} \cdot 19 \\ & & \neq 0 \end{array}\right)$$

$r \cap s = \emptyset$ ossia r, s sono sghembe

4.

$$\det\begin{pmatrix} -\frac{1}{7}-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 1 & 3 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \left(-\frac{1}{7}-\lambda\right)\left[(1-\lambda)(2-\lambda)-9\right]+\lambda-1 =$$

$$= \left(-\frac{1}{7}-\lambda\right)\left(2+\lambda^2-3\lambda-9\right)+\lambda-1 =$$

$$= -\left(\frac{1}{7}+\lambda\right)\left(\lambda^2-3\lambda-7\right)+\lambda-1 =$$

$$= -\left[\frac{1}{7}\lambda^2-\frac{3}{7}\lambda-1+\lambda^3-3\lambda^2-7\lambda\right]+\lambda-1 =$$

$$= -\left[\lambda^3-\frac{20}{7}\lambda^2-\frac{52}{7}\lambda-1\right]+\lambda-1$$

$$= -\lambda^3+\frac{20}{7}\lambda^2+\frac{52}{7}\lambda+\cancel{1}+\lambda-\cancel{1} =$$

513	3
171	3
57	3
19	19

$$= -\lambda^3+\frac{20}{7}\lambda^2+\frac{59}{7}\lambda$$

$$= -\lambda\left(\lambda^2-\frac{20}{7}\lambda-\frac{59}{7}\right)$$

$\lambda = 0$ autovalore

Ora $7\lambda^2-20\lambda-59=0$

$$\lambda = \frac{10\pm\sqrt{100+413}}{7} = \frac{10\pm\sqrt{513}}{7}$$

$$= \frac{10\pm 3\sqrt{57}}{7}$$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Tenuto conto dei valori disponibili tuttavia Q_A può essere semidef ≥ 0 o indefinita

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -1 + \lambda + (2-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 4\right) =$$
$$= -1 + \lambda + (2-\lambda)(\lambda^2 + 1 - 2\lambda - 4) =$$
$$= -1 + \lambda + (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) =$$
$$= -1 + \cancel{\lambda} + \underline{2\lambda^2} \cancel{-4\lambda} - 6 - \lambda^3 + \underline{2\lambda^2} + \cancel{3\lambda} =$$
$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 7$$

La sequenza dei coeff $\neq 0$ è $-1, 4, -7$ che evidenzia due variazioni $\to$ 2 aut. > 0 il terzo è < 0. Pertanto Q_A è <u>indefinita</u>. Quindi necessariamente esistono $X, Y \in \mathbb{R}^3$ t.c. $Q_A(X) > 0$, $Q_A(Y) < 0$

6. $\det(A+B) = \det A + \det B$ è falsa

lo abbiamo visto a lezione.
Comunque prendendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

risulta $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ e quindi

$\det(A+B) = -6$ mentre $\det A = 0$ $\det B = -3-2 = -5$

Anche $\det(\lambda A) = \lambda \det A$ è falsa

Si prenda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda = 2$

Invece essendo det lineare sulle colonne si ha, indicando $A = (C_1 \mid C_2 \mid C_3)$, che

$$\det(\lambda A) = \det(\lambda C_1 \mid \lambda C_2 \mid \lambda C_3) =$$
$$= \lambda^3 \det(C_1 \mid C_2 \mid C_3) = \lambda^3 \det A.$$

- $\det(AB + A^2) = \det[A(A+B)] =$
$$= \det(A+B) \cdot \det A = 4 \cdot 6 = 24 \neq 0$$

pertanto $AB + A^2$ è invertibile avendo $\det \neq 0$.