

Esame di Algebra Lineare e Geometria Analitica

(Dott.ssa D. Bubboloni)

17 Dicembre 2015

Avete due ore e mezzo a disposizione. Potete scegliere 5 fra i 6 esercizi proposti. Giustificate con cura le vostre risposte.

1. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ il seguente sistema, dopo averlo portato in forma normale.

$$\begin{cases} x + ay - z = t \\ 2x - y - t - 3 = a \\ x + 2y = -z \end{cases}$$

Successivamente, dire se esistono valori di a per cui l'insieme ha ∞^2 soluzioni e, in tal caso esplicitarle.

2. Data la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ b+2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5+b \end{pmatrix},$$

determinare $b \in \mathbb{R}$ tale che B sia simmetrica e, per tale b , dire se esiste una matrice C ortogonale tale che $C^{-1}BC$ sia diagonale. In caso affermativo determinare tale C .

3. Sfruttando il teorema di Binet, dire quali valori può assumere in determinante di una matrice $C \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $C^3 = C$ e fornire esempi per ciascuno dei valori possibili. Una tale C è sicuramente invertibile?

4. Data la funzione $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$L(x, y, z)^T = (-x + 2y + 3z, y + z, -2x + 7y + 9z)^T,$$

dimostrare che è lineare e determinarne nucleo e immagine. Dire se L è iniettiva/suriettiva.

5. Determinare il segno della forma quadratica su \mathbb{R}^3 definita da $Q(X) = X^T AX$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Scrivere esplicitamente il polinomio omogeneo $Q(X)$, se $X = (x_1, x_2, x_3)^T$. Dire se esistono $X, Y \in \mathbb{R}^3$ tali che $X \neq 0$, $Q(X) = 0$ e $Q(Y) > 0$. In caso affermativo sapete trovare esplicitamente X ?

6. Dati i vettori di \mathbb{Q}^4 seguenti

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

dire se costituiscono:

- a) una base
- b) un sistema di generatori

per \mathbb{Q}^4 .