Esame di Algebra Lineare e Geometria Analitica

(Prof.ssa D. Bubboloni) 24 Gennaio 2017

Avete due ore e mezzo a disposizione. Ogni esercizio contribuisce, se perfettamente svolto a 6 punti per l'attribuzione del punteggio finale. Potete pertanto scegliere, se volete, 5 esercizi fra i 6 proposti. Giustificate con cura le vostre risposte.

1. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ il seguente sistema.

$$\begin{cases} x + ay - z - t = 0 \\ 2x + y - t = -a + 3 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

Successivamente, dire se esistono valori di a per cui il sistema ha ∞^1 soluzioni e, in tal caso esplicitarle.

2. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(X) = AX$ per ogni $X \in \mathbb{R}^3$, dove X è un vettore colonna. Dire perché f è lineare, usando solo la definizione di linearità, e trovarne poi nucleo e immagine. Dire se f è iniettiva e/o suriettiva.

3. Scrivere, in forma matriciale, la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$ associata al polinomio $p(x, y, z) = -2x^2 - y^2 + 6yz - 7z^2 + 4xy$ e stabilire se risulta definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita. In base a quanto ottenuto si puo' concludere che risulta $p(x, y, z) < 0$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$?

4. Data la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 5/4 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & 7/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dire se M é simmetrica e se $\mathbb{R}^3$ ammette una base di autovettori di M. In caso affermativo determinarne una. Dire se esiste C matrice invertibile in $M_3(\mathbb{R})$ tale che $C^{-1}MC = Diag(1, 2, 3)$.

5. Dire se la seguente lista ordinata di vettori

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

è una base di $\mathbb{R}^4$ e, in caso affermativo, trovare le coordinate del vettore

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

rispetto ad essa.

6. Provare che la matrice

$$\begin{pmatrix} b & 0 & 4 \\ -2 & 1 & b \\ 0 & b & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

risulta invertibile per ogni $b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 1$.

Determinare esplicitamente l'inversa per $b = 0$.

1.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -a+3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{-2 \\ -1}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-2a & 2 & 1 & -a+3 \\ 0 & -1-a & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_4}$$

$$\begin{array}{cccc} x & t & z & y \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1-2a & -a+3 \\ 0 & 1 & 2 & -1-a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-1}$$

$$\begin{array}{cccc} x & t & z & y \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1-2a & -a+3 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 & a-2 \end{array}\right)$$

essendo

$$-1-a-(1-2a) = -1-a-1+2a = a-2$$

$$1-(-a+3) = 1+a-3 = a-2$$

2 pivot certi : 1, 1

$a-2$ è pivot se $a \neq 2$.

$a \neq 2$: ∞^1 soluzioni (z libera)

$a = 2$: ∞^2 soluzioni (z, y libere)

Vanno ora esplicitate le sol nel caso generale $a \neq 2$.

$(a-2)y = a-2$ dà $\boxed{y=1}$. $\boxed{z \text{ libera}}$.

$t + 2z + 1 - 2a = -a + 3$ dà

$t = -2z - 1 + 2a - a + 3$ cioè $\boxed{t = -2z + a + 2}$

$x - (-2z + a + 2) - z + a = 0$ dà

$x = -2z + \cancel{a} + 2 + z - \cancel{a} = -z + 2$ $\boxed{x = -z + 2}$

$$S_a = \left\{ \begin{pmatrix} -z+2 \\ 1 \\ z \\ -2z+a+2 \end{pmatrix} \middle| \; z \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{per } a \neq 2$$

2. $$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & x' \\ 3 & -1 & -4 & y' \\ 2 & 1 & -1 & z' \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{3\\2}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & x' \\ 0 & 5 & 5 & y'+3x' \\ 0 & 5 & 5 & z'+2x' \end{array}\right) \xrightarrow{-1}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & x' \\ 0 & 5 & 5 & y'+3x' \\ 0 & 0 & & z'+2x'-y'-3x' \end{array}\right)$$

$$\operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -x'-y'+z'=0 \right\}$$

$\dim \operatorname{Im} f = 2$ $\qquad$ f non suriettiva

ES2 seguito

Ponendo $x'=y'=z'=0$ si trova $\ker f$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

z libera. Poniamo $z=1$

$y+1=0 \quad \boxed{y=-1}$

$-x-2+3=0 \quad \boxed{x=1}$

$\ker f = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\dim \ker f = 1$

f non suriettiva.

3. Posto $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ vale

$$Q_A(X) = X^T A X = -2x^2 - y^2 + 6yz - 7z^2 + 4xy$$

Sicuro: A non è def >0 e neanche semidef >0.

Segno autovalori:

$$\det\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & -7-\lambda \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \oplus \\ \ominus \\ \oplus \end{array} = -3\det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

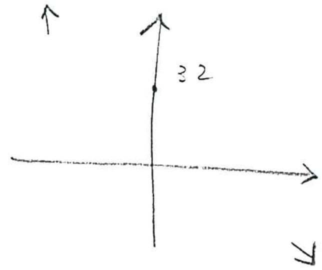
$$+(-7-\lambda)\det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -3\left[-6-3\lambda\right] - (7+\lambda)\left[(2+\lambda)(1+\lambda)\right.$$

$$\left.-4\right] = 18 + 9\lambda - (7+\lambda)(\lambda^2+3\lambda+2-4) =$$

$$= 18 + 9\lambda - (7+\lambda)(\lambda^2+3\lambda-2) =$$

$$= 18 + 9\lambda - 7\lambda^2 - 21\lambda + 14 - \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda =$$

$$= -\lambda^3 - 10\lambda^2 - 11\lambda + 32$$



Variazioni 1 : c'è una radice > 0 $\Rightarrow$ forma indef.

4. M non è simmetrica

$$p_M(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 5/4-\lambda & 3/4 & 0 \\ 1/4 & 7/4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left[\left(\tfrac{5}{4}-\lambda\right)\left(\tfrac{7}{4}-\lambda\right) - \tfrac{3}{16}\right]$$

$p_M(\lambda) = 0$ per $\lambda = 1$ e $\lambda^2 - 3\lambda + \frac{35}{16} - \frac{3}{16} = 0$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$

Gli autovalori sono 1 con $m(1) = 2$
2 con $m(2) = 1$

Non è scontato che una base di autovettori esista.

$$V_1 : \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

∞^2 sol Poiché $\dim V_1 = 2 = m(1)$

essendo ovvio che $\dim V_2 = 1 = m(2)$

ci sono le condizioni per l'esistenza di una base di autovettori

Troviamo base per V_1 : y e z libere

e $x + 3y = 0 \Rightarrow x = -3y$

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -3y \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y, z \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

V_2 : $$\begin{pmatrix} -3/4 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \cancel{-1} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y libera , $z = 0$, $-x + y = 0 \Rightarrow x = y$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Es 4 seguito

Una base d'autovettori è

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Poiché 3 non è un autovalore per M la richiesta $C^{-1} M C = \mathrm{Diag}(1,2,3)$ non è soddisfacibile.

5. Troviamo subito le coo risolvendo

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$C_2 \leftrightarrow C_1$

$$\xrightarrow{} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b & a & c & d \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ -1 \end{array} \xrightarrow{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4}$$

$$\xrightarrow{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} -3 \\ 0 \end{array} \xrightarrow{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right) -\tfrac{1}{3} \xrightarrow{}$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7/3 & 13/3 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} b & a & c & d \end{array} \end{array}$$

Ci sono 4 pivot $\Rightarrow \mathcal{B}$ base

$\boxed{d} = 1\,3/\cancel{3}\,(-\cancel{3})\ \boxed{= -13}$

$+6c + 52 = +1$, $\boxed{c = -51/6 = -\frac{17}{2}}$

$a + \cancel{2}\left(-\frac{17}{\cancel{2}}\right) + 13 = 0$, $\boxed{a = 4}$

$b + \frac{17}{2} = 1$, $\boxed{b = -15/2}$

Quindi

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -15/2 \\ -17/2 \\ -13 \end{pmatrix}$$

check: $4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{15}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{17}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 13\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$-\frac{15}{2} + \frac{17}{2} = 1$ ✓

$\frac{45}{2} - \frac{17}{2} - 13 = 1$, $\frac{45 - 17 - 26}{2} = 1$ ✓

$12 - 13 = -1$ ✓

$4 - \frac{15}{2} - \frac{17}{2} + 13 = 1$, $\frac{8 - 15 - 17 + 26}{2} = 1$ ✓

6.

$$\det \begin{pmatrix} b & 0 & 4 \\ -2 & 1 & b \\ 0 & b & 3 \end{pmatrix} = b\left(3-b^2\right)+2\left(-4b\right) =$$

$$= b\left(3-b^2-8\right) = -b\left(b^2+5\right)$$

Quindi vale 0 per

$$-b\left(b^2+5\right)=0$$

$b=0$ o $b^2+5=0$ ma $b^2+5 \neq 0$ in $\mathbb{R}$.

Pertanto la matrice è invertibile per $b \neq 0$.

Se $b=1$ calcoliamo l'inversa con Gauß

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{2 \\ 0}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/6 & -1/6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{-4 \\ -9 \\ \uparrow EG}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/6 & -1/6 \end{array}\right)$$

L'inversa è $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ -6 & -3 & 9 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$