3.3 Segno di una forma quadratica

Ogni forma quadratica si annulla nel punto $x = 0$ ciò che distingue una forma dall'altra è l'insieme dei valori assunti dalla forma per $x \neq 0$.

In genere la forma quadratica in una variabile è $f(x) = ax^2$ per $a > 0$ è sempre non negativa e si annulla per $x = 0$.

Questa forma è **definita positiva** e $x = 0$ è un punto di minimo globale.

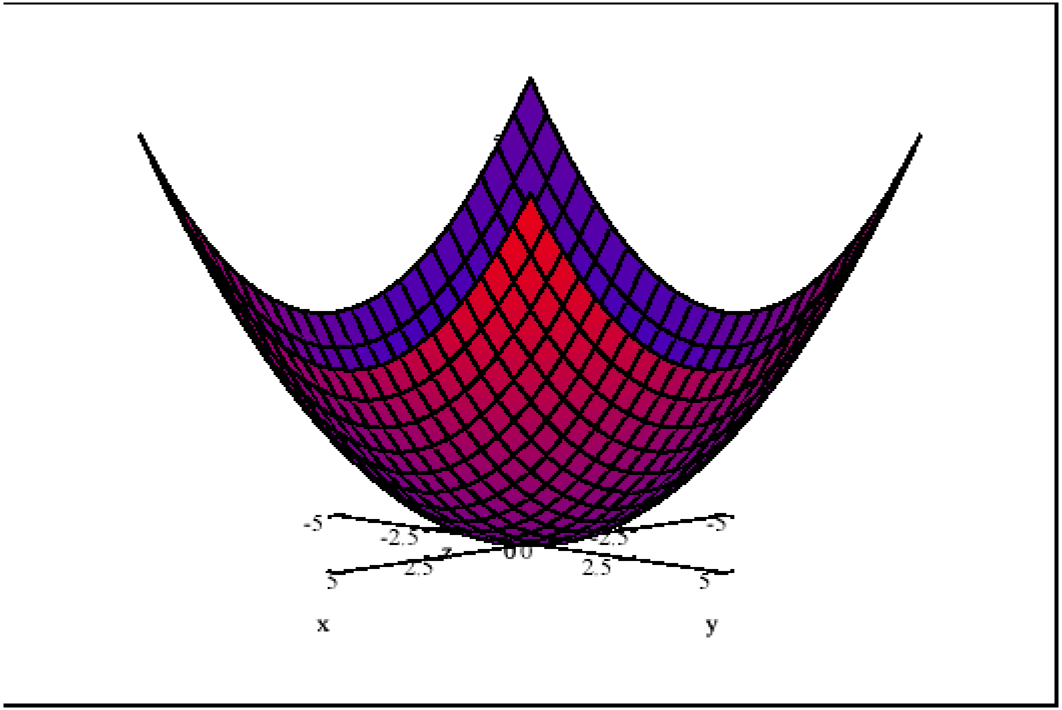
Per $a < 0$ la forma è sempre minore o uguale a zero, annullandosi per $x = 0$ e il punto è un punto di massimo globale. Tale forma si dice definita negativa.

Nel caso bidimensionale la forma quadratica

$$Q_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \qquad [14]$$

è anch'essa positiva per ogni valore di $x_1 \neq 0$ ed $x_2 \neq 0$, pertanto Q_1 è **definita positiva.**

Forma quadratica positiva



Forma quadratica definita POSITIVA $x_1^2 + x_2^2$

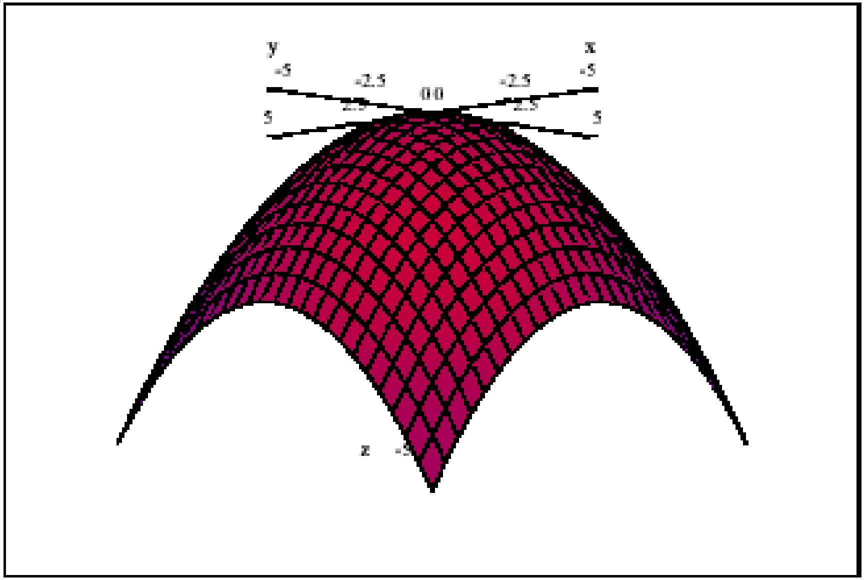
Forma quadratica negativa

Forme quadratiche del tipo

$$Q_1(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$$

[15]

sono negative ovunque tranne che nell'origine perciò si dicono **definite negative**.



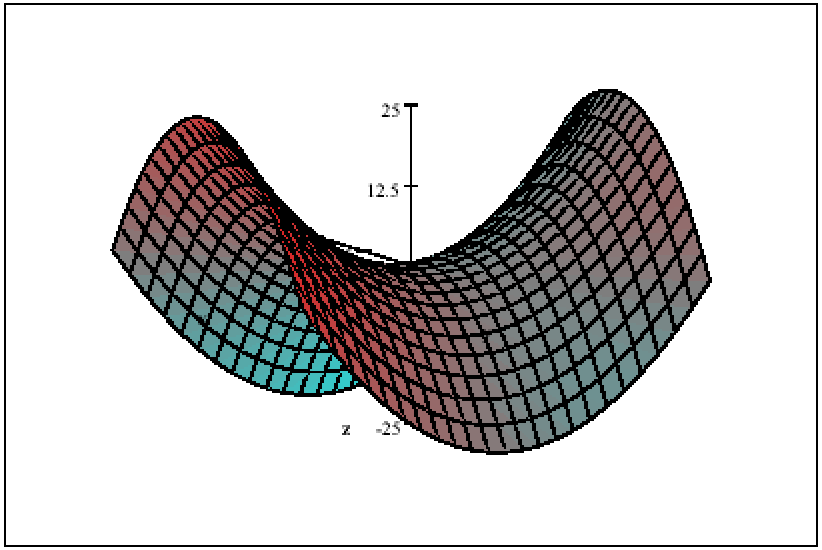
Forma quadratica definita NEGATIVA $-x_1^2 - x_2^2$

Forma quadratica indefinita

La forma quadratica

$$Q_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$ 16]

può assumere valori sia positivi sia negativi e perciò si dice **indefinita.**



Forma quadratica INDEFINITA $x_1^2 - x_2^2$

Forma quadratica semi-definita

Vi sono poi due casi intermedi: una forma quadratica che è sempre positiva o nulla si dice **semidefinita positiva** una forma quadratica che è sempre negativa o nulla si dice **semidefinita negativa**

Le cinque definizioni viste per il segno della forma quadratica si trasportano direttamente alla matrice simmetrica A che la caratterizza.

Definizione del Segno

La definizione è la seguente:

La matrice A, simmetrica di dimensioni nXn, si dice

- definita positiva se $x^T Ax > 0$ per ogni $x \neq 0$ di $\Re^n$
- definita negativa se $x^T Ax < 0$ per ogni $x \neq 0$ di $\Re^n$
- semidefinita positiva se $x^T Ax \geq 0$ per ogni $x \neq 0$ di $\Re^n$
- semidefinita negativa se $x^T Ax \leq 0$ per ogni $x \neq 0$ di $\Re^n$
- indefinita se $x^T Ax > 0$ per almeno un x di $\Re^n$, $x^T Ax < 0$ per almeno un x di $\Re^n$.

Una matrice definita positiva (negativa) è a maggior ragione semidefinita positiva (negativa). Con questa specificazione si può dire che ogni matrice simmetrica appartiene ad uno dei cinque tipi precedenti.

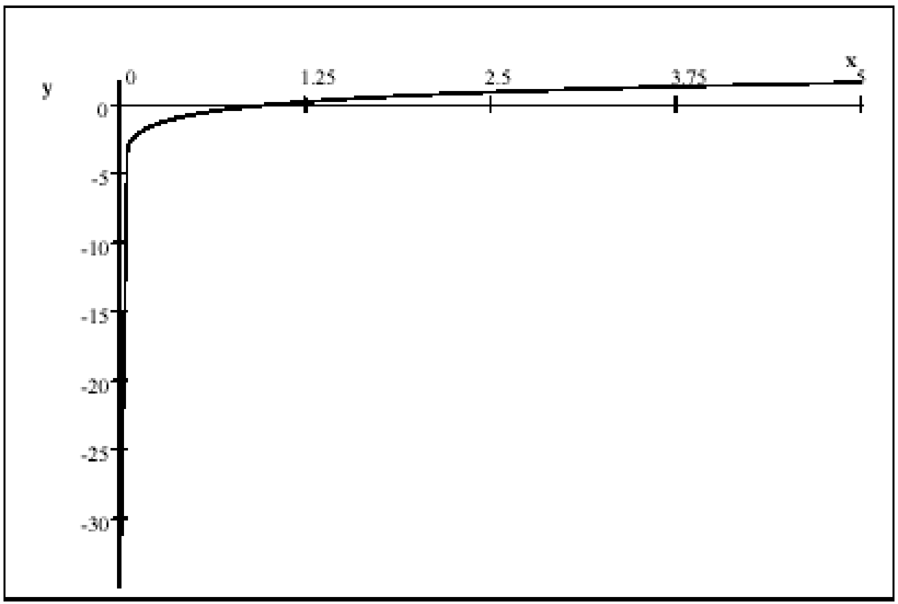
Utilizzo del segno di una forma quadratica

Lo studio del segno di una matrice simmetrica svolge un ruolo importante nella teoria economica. Nel caso di funzione di una sola variabile, $f(x)$, lo studio del segno della derivata seconda della funzione nel punto in cui la derivata prima si annulla, x_0, $f''(x_0)$, permette di determinare se tale punto è di minimo o massimo. La generalizzazione di questo criterio per un numero di variabili maggiori di uno (passare da $\Re$ ad $\Re^n$), porta allo studio del segno della matrice Hessiana (matrice delle derivate parziali seconde). Lo studio del segno della matrice Hessiana porta a definire la natura del punto stazionario, se di minimo o massimo, della funzone in esame.

Utilizzo…..

Tornando alla funzione di una sola variabile $f(x)$ essa è concava se la sua derivata seconda $f''(x)$ è negativa o nulla su un certo intervallo e la funzione cosi' ha un massimo. Tipico esempio di funzioni concave in economia sono le funzioni di utilità:

$$U(x) = \ln(x)$$ [17]



dove con x indichiamo la ricchezza dell'individuo espressa in moneta.

Definizione di minori principali

- Per stabilire il segno di una forma quadratica o della corrispondente matrice simmetrica richiamiamo alcune definizioni.

  Sottomatrice principale: Data una matrice A nXn, la sottomatrice kxk da essa ottenuta eliminando $n-k$ colonne e le stesse $n-k$ righe si dice sottomatrice prinicipale di A di ordine k.

  Minore principale: il determinante di una sottomatrice principale di ordine k

  Sottomatrice principale di nord-ovest: la sottomatrice di ordine k che si ottiene eliminado le ultime $n-k$ righe e colonne

  Minore principale di nord-ovest: il determinante di una sottomatrice principale di nord-ovest di ordine k.

Esempio di minori principali

Una matrice nXn ha n matrici prinicipali di nord-ovest, la marice di nord-ovest 1x1, la matrice di nord-ovest 2x2 e così via.

Nel caso di una matrice 3 x3 i tre minori principali di nord-ovest sono:

$$M_1 = |a_{11}| \qquad M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad M_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Forma quadratica definita

- Data una matrice A, $n \times n$ simmetrica:

  a)A è defnita positiva se e solo se tutti i suoi n minori principali di nord-ovest sono positivi

  b) A è defnita negativa se e solo se tutti i suoi n minori principali di nord-ovest si alternano in segno nel seguente modo:

$$M_1 < 0, \quad M_2 > 0, \quad M_3 < 0.......$$

  ovvero il minore principale di nord-ovest di ordine k ha lo stesso segno di $(-1)^k$

  c)Se almeno un inore principale di nord ovest di ordine k è diverso da 0 ma non soddisfa nessuno dei due andamenti precedenti A è indefinita. Ciò accade quando A ha un minore principale di nord-ovest di ordine k negativo per k pari o quando A ha un minore principale di nord-ovest di ordine k negativo e uno di ordine l positivo per due distinti valori dispari di k e l.

Forma semidefinita

Tale criterio non è esaustivo poichè non dice nulla quando almeno un minore di nord-ovest si annulla. mentre gli altri soddisfano gli andamenti di a) e b). Se ciò si verifica la matrice A non è definita allora può essere semidefinita o indefinita.

Data la matrice $An \times n$, A è semidefinita positiva se e solo se ogni minore principale di A è positivo o nullo; è semidefinita negativa se e solo se ogni minore principale di ordine dispari è negativo o nullo, ogni minore principale di ordine pari è positivo o nullo.

Esercizio

ESERCIZIO 1 Consideriamo le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Consideriamo i minori principali di nord-ovest della matrice A:

$$M_1 = 2 > 0; M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 5 > 0$$

entrambi >0 quindi A èdefinita positiva.

Consideriamo i minori principali di nord-ovest della matrice B:

$$M_1 = 1 > 0; M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0; M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -25$$

il primo, dispari, è >0, il secondo è =0 ed il terzo dispari è <0 nessuno dei criteri a) o b) è soddisfatto quindi la matrice è indefinita.

Esempio

Esempio 1. Un'industria produce un prodotto in due stabilimenti S_1 ed S_2, siano q_1 e q_2 le quantità prodotte in ciascuno di tali stabilimenti. Si vuole determinare le quantità da produrre, q_1 e q_2, che massimizzano il profitto $f(q_1, q_2)$. Il profitto viene misurato come differenza tra ricavi $R(q_1, q_2)$, e costi $C(q_1, q_2)$, dove:

$$\begin{aligned} R(q_1, q_2) &= p(q_1 + q_2) = (50 - (q_1 + q_2))(q_1 + q_2) \\ C(q_1 + q_2) &= 2q_1^2 + 3q_2^2 \end{aligned}$$

La funzione profitto è quindi data da :

$$f(q_1, q_2) = 50(q_1 + q_2) - 3q_1^2 - 4q_2^2 - 2q_1 q_2$$

Esempio (2)

- Per trovare il massimo di $f(q_1, q_2)$, individuiamo i punti critici della funzione: $\nabla f(q_1, q_2) = 0$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} -6q_1 - 2q_2 + 50 \\ -8q_2 - 2q_1 + 50 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{array}{l} q_1^* = \frac{75}{11} \\ q_2^* = \frac{50}{11} \end{array}$$

Per vedere se il vettore $q^* = [q_1^*, q_2^*]$ è un punto di massimo o di minimo calcoliamo l'hessiana di f :

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}$$

Per studiare il segno dell'hessiana di f consideriamo i minori

principali di guida di ordine 1, M_1, e di ordine 2, M_2:

$$\begin{aligned} M_1 &= -6 < 0 \\ M_2 &= 44 > 0 \end{aligned}$$

quindi $\nabla^2 f$ è definita negativa e q^* è un punto di massimo. In particolare, q^* è un punto di massimo globale in quanto la funzione è concava su A.

Presenza di vincoli lineari

- Determinare il segno di una forma quadratica Q equivale a stabilire se il punto $x = 0$ è di massimo, minimo o nessuno dei due per la funzione $Q(x)$. Ad esempio $x = 0$ è l'unico punto di minimo globale se la forma quadratica è definita positiva. $x = 0$ è l'unico punto di massimo gobale se la forma quadratica è definita negativa.

  La caratterizzazione del segno di una matrice simmetrica funziona solo se x può assumere qualsiasi valore in $\Re^n$ In presenza di vincoli l'analisi si complica. Ad esempio molto spesso in economia dobbiamo studiare dei punti "critici" di una funzione solo all'interno di una rosa di possibili valori o di una regione ammissibile che può essere individuata dall'insieme dei punti he soddisfano alcune relazioni.

Vincoli lineari

Una possibile regione ammissibile, ad esempio, è individuata dall'insieme dei punti tali che

$$x_1 + x_2 = 1 \qquad \forall x \in \Re^2$$

o in generale

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \qquad \forall x \in \Re^n$$

detto anche vincolo di bilancio.

Sia $Q(x)$ una forma quadratica. Si vogliono determinare le condizioni cui deve soddisfare una matrice A affinchè $Q(x) = x^T A x$ sia definita positiva o negativa o semidefinita per i vettori x appartenenti ad una certa regione ammissiile definita da $Bx = b$ con $B(m \times n)$, $x \in \Re^n$, $b \in \Re^m$, B di rango $m < n$.

$$\begin{cases} Q(x) = x^T A x \geq 0, > 0, \leq 0, < 0 \\ \qquad \forall x \in V = \{x : Bx = b\} \end{cases}$$

Vincoli lineari

Per tener conto dell'appartenenza di x alla varietà lineare costruiamo la matrice Hessiana orlata:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & A \end{bmatrix}$$

e considerati i minori principali di guida di ordine k, M_k, con $k \geq (2m+1)$ si prova che:

- $Q(x) \geq 0 \quad \forall x \in V \Leftrightarrow M_k \ \ \forall k \geq 2m+1$ hanno tutti il segno di $(-1)^m$ o al più sono nulli;
- $Q(x) > 0 \quad \forall x \in V - \{0\} \Leftrightarrow M_k \ \ \forall k \geq 2m+1$ hanno tutti il segno di $(-1)^m$;
- $Q(x) \leq 0 \quad \forall x \in V \Leftrightarrow M_k \ \ \forall k \geq 2m+1$ hanno segno alterno a cominciare dal segno di $(-1)^{m+1}$ o sono nulli;
- $Q(x) < 0 \quad \forall x \in V - \{0\} \Leftrightarrow M_k \ \ \forall k \geq 2m+1$ hanno segno alterno a cominciare dal segno di $(-1)^{m+1}$.

Esercizio

Un investitore è caratterizzato dalla seguente funzione di utilità

$$U\left(\underline{x}\right) = -2x_1 - \frac{1}{2}x_2 - 3\ln x_2 + 9x_1^2$$

(1) si determini il massimo di tale funzione e si dica se tale funzione individua un investitore propenso al rischio.

(2) Si determini, inoltre, il massimo, se esiste, della $U(\cdot)$ soggetta al vincolo

$$h(x) = 3x_1 - x_2 = 1$$

Soluzione:

(1) Calcolo il gradiente della funzione

$$\nabla U = \begin{bmatrix} -2 + 18x_1 \\ -\frac{1}{2} - \frac{3}{x_2} \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{9} \\ x_2 = -6 \end{cases}$$

Il punto che annulla il gradiente è il punto A $\left[\frac{1}{9}, -6\right]$.
Calcoliamo l'Hessiana per vedere se la funzione individua un ivestitore propenso ($\nabla^2 > 0$) o avverso al rischio:.

$$H = \begin{bmatrix} 36 & 0 \\ 0 & \frac{3}{x_2^2} \end{bmatrix}$$

Esercizio

I determinanti dei minori principali di guida di ordine $1, 2$:

$$M_1 = 18 > 0, \, M_2 = \frac{54}{x_2^2} > 0$$

la matrice è definita positiva quindi l'investitore è un investitore propenso al rischio ed il punto A è un punto di minimo e non di massimo.

Esercizio

(2) Per risolvere il problema di ottimizzazione vincolate costruisco la funzione Lagrangiana:

$$L(\underline{x}, \lambda) = -2x_1 - \frac{1}{2}x_2 - 3\ln x_2 + 9x_1^2 - \lambda(3x_1 - x_2 - 1)$$

Calcolo i punti che annullano il gradiente della $L(\underline{x}, \lambda)$:

$$\nabla L(\underline{x}, \lambda) = \begin{bmatrix} -2 + 18x_1 - 3\lambda \\ -\frac{1}{2} - \frac{3}{x_2} + \lambda \\ 3x_1 - x_2 - 1 \end{bmatrix} = 0$$

Risolvo il sistema rispetto a $(\underline{x}, \lambda)$:

$$\begin{cases} -\frac{2}{3} + 6x_1 = \lambda \\ \lambda = \frac{1}{2} + \frac{3}{x_2} \\ x_1 = \frac{x_2+1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{2}{3} + 6\frac{x_2+1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{3}{x_2} \\ \lambda = \frac{1}{2} + \frac{3}{x_2} \\ x_1 = \frac{x_2+1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{5}{6} + 2x_2 - \frac{3}{x_2} = 0 \\ \lambda = \frac{1}{2} + \frac{3}{x_2} \\ x_1 = \frac{x_2+1}{3} \end{cases}$$

Esercizio

$$\begin{cases} x_2 = \frac{5 \pm \sqrt{25+864}}{-24} = \left\langle \begin{array}{l} {}_1x_2 = -1.45 \\ {}_2x_2 = 1.03 \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -1.45 \\ \lambda = 0.5 - \frac{3}{1.45} = -1.569 \\ x_1 = \frac{-0.45}{3} = -0.15 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1.03 \\ \lambda = 0.5 + \frac{3}{1.03} = 3.413 \\ x_1 = \frac{2.45}{3} = 0.816 \end{cases}$$

I punti che annullano il gradiente sono $A = (-0.150, -1.45; -1$ $(0.816, 1.034; 3.413)$. Calcolo l'Hessiana orlata per verificare se tali punti sono di minimo o massimo:

$$[H|g] = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & 18 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{3}{x_2} \end{bmatrix}$$

Calcolo i minori di ordine 3, : M_3 :

$$M_3 = -18 - \frac{27}{x_2} < 0$$

L'H èdefinita positiva quindi i due punti sono entrambi di minimo.