Chapter 10

Richiami di trigonometria

10.1 Definizioni

Definizione Siano date due semirette r, r_1 con vertice in uno stesso punto O. Le due semirette dividono il piano che le contiene, privato delle due semirette stesse, in due parti distinte dette **angoli**.

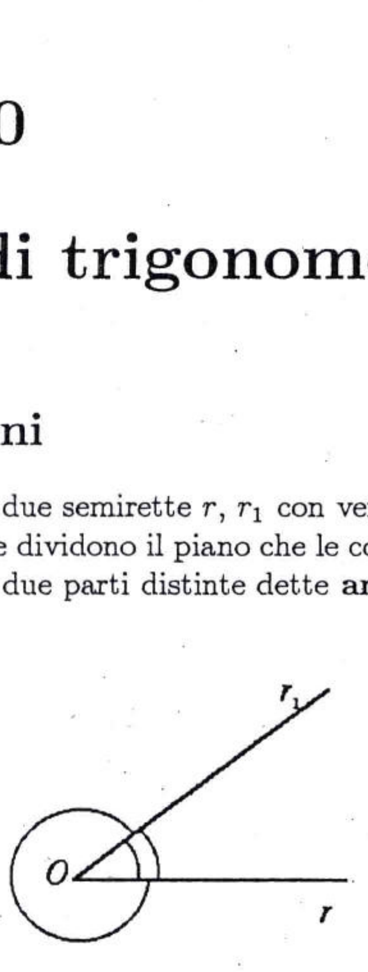

Figure 10.1: Definizione di angoli

Definizione Se le due semirette coincidono, cioè se $r = r_1$, allora una delle due parti in cui è diviso il piano è vuota; in tal caso l' angolo non vuoto è chiamato **angolo giro** mentre l' angolo vuoto è detto anche angolo nullo. Per convenzione, la **misura in gradi** dell' angolo giro è 360, e si scrive 360°.

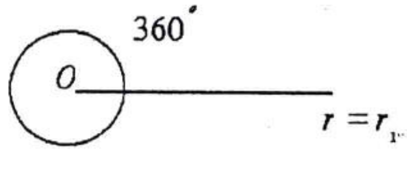

Figure 10.2: Angolo giro

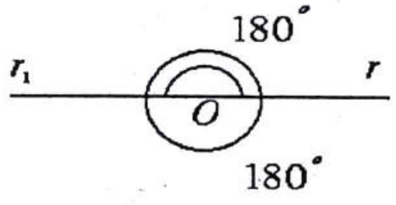

Figure 10.3: Angolo piatto

Definizione La metà dell' angolo giro è chiamata **angolo piatto**, misura 180° e corrisponde a due semirette r, r_1 allineate con versi opposti.

Definizione La quarta parte dell' agolo giro è chiamata angolo retto e misura 90°

E' possibile associare ad ogni angolo piano una misura in gradi. Oltre che in gradi , è utile misurare gli angoli in radianti.

A tal fine, si consideri la circonferenza di raggio 1 con centro nel vertice O, punto di incontro delle due semirette r, r_1 (vedi figura 10.5).

Definizione La misura in radianti di un angolo è il rapporto fra la lunghezza dell' arco di circonferenza e il suo raggio; tale misura risulta perciò adimensionale. Per convenzione si preferisce considerare la circonferenza di raggio 1.

Dato che la lunghezza di una circonferenza di raggio 1 è 2π , il numero 2π è appunto la misura in radianti dell' angolo giro; π è la misura in radianti dell' angolo piatto, $\frac{\pi}{2}$ è la misura in radianti dell' angolo retto.

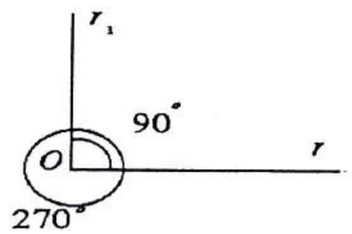

Figure 10.4: Angolo retto

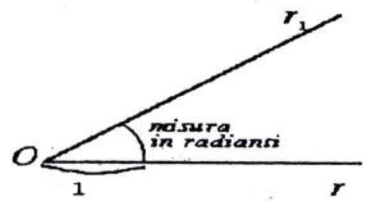

Figure 10.5: Misura in radianti

Per gli angoli più utilizzati si ha la seguente tabella di connessione:

gradi	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
radianti	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

(10.1)

Osservazione Per passare dalla misura in gradi alla misura in radianti e viceversa, vale la seguente proporzione:

$$\alpha^\circ : 360^\circ = \alpha^{(r)} : 2\pi$$

Esempio Determiniamo la misura in gradi di un angolo che espresso in radianti vale 1.

Sia x la misura uin gradi dell' angolo di 1 radiante.

$$x : 1 = 360^\circ : 2\pi$$

$$x = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \simeq \frac{180^\circ}{3.14} \simeq 57^\circ$$

Quindi un angolo di un radiante misura circa 57°.

Esempio Determiniamo la misura in radianti di un angolo che espresso in gradi misura 60°.

$$x : 60^\circ = 2\pi : 360^\circ$$

$$x = \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 60^\circ = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{3}$$

Nelle macchinette calcolatrici si trovano sia la possibilità di indicare la misura di un angolo i gradi (modalità DEG) siaa in radianti (modalità RAD) sia altre possibilità che non verranno usate. Occorre fare particolare attenzione alla modalità di misura richiesta dal testo.

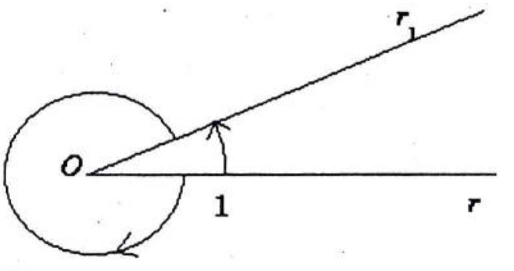

Figure 10.6: Sulla circonferenza di raggio 1

Consideriamo r come retta di riferimento fissata e pensiamo di prendere la circonferenza di raggio 1 per passare da r ad r_1. L' angolo minore formato da r ad r_1 è percorso in senso antiorario, mentre l' angolo maggiore è percorso in senso orario (vedi figura 10.6).

Nel primo caso si dice che l' angolo è orientato *positivamente* , nel secondo caso che è orientato *negativamente*.

Nel movimento da r ad r_1 si può percorrere più volte la circonferenza di raggio 1 con centro nel vertice dell' angolo.

Se andiamo in senso antiorario verso il punto di incontro con r_1 individuiamo un angolo la cui misura in radianti è un numero α positivo.

Se percorriamo più volte la circonferenza in senso antiorario fino ad incontrare più volte r_1 individuiamo angoli la cui miure in radianti valgono:

$$\alpha + 2\pi, \qquad \alpha + 4\pi, \qquad \alpha + 6\pi, \qquad ...., \qquad \alpha + 2k\pi,$$

Analogamente se misuriamo in gradi tale angolo abbiamo:

$$\alpha + 360°, \qquad \alpha + 720°, \qquad \alpha + 1080°, \qquad ....$$

Se ci muoviamo invece in senso orario incontrando r individuiamo angoli che misurano:

$$\alpha - 2\pi, \qquad \alpha - 4\pi, \qquad \alpha - 6\pi, \qquad ...., \qquad \alpha - 2k\pi,$$

e in gradi:

$$\alpha - 360°, \qquad \alpha - 720°, \qquad \alpha - 1080°, \qquad ....$$

Esempio L' angolo di misura $-\frac{\pi}{4}$ è lo stesso dell' angolo di misura $-\frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{9}{4}\pi$, confronta figura 10.7.

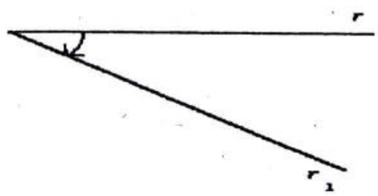

Figure 10.7: Misura di $-\frac{\pi}{4}$

10.2 Funzioni seno e coseno

Consideriamo un riferimento cartesiano ortogonale di assi x, y ed assumiamo il semiasse positivo delle ascissa come retta r di riferimento per la misurazione degli angoli.

Consideriamo inoltre un angolo orientato che misura in radianti un numero $\alpha \in \Re$. Ricordiamo che la circonferenza di riferimento ha centro nell' origine degli assi ed ha raggio 1.

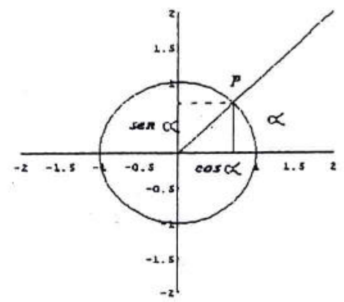

Figure 10.8: Definizione di seno e coseno

Definizione Il **seno** di α, indicato con $sen\alpha$, è l' ordinata del punto P sulla circonferenza di riferimento (centro nell' origine e raggio unitario) che sottende un angolo di misura α ; P risulta l' estremo dell' arco di circonferenza di misura α.

Definizione Il **coseno** di α, indicato con $cos\alpha$, è l' ascissa sul punto P sulla circonferenza di riferimento, dove P sottende un angolo di misura α (vedi figura 10.8).

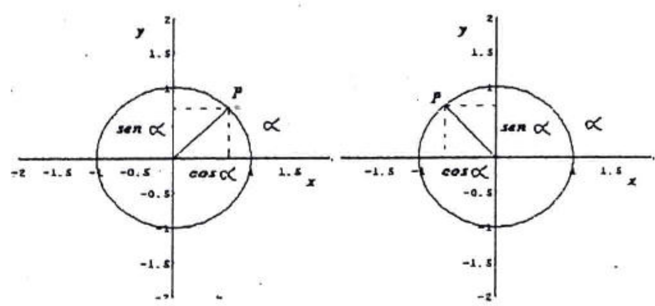

Figure 10.9: $sen\alpha$ e $cos\alpha$ con α nel I e II quadrante

Esempio Se $\alpha = 0$ e $P\,(1, 0)$ in base alla definizione data risulta (vedi figura 10.11):

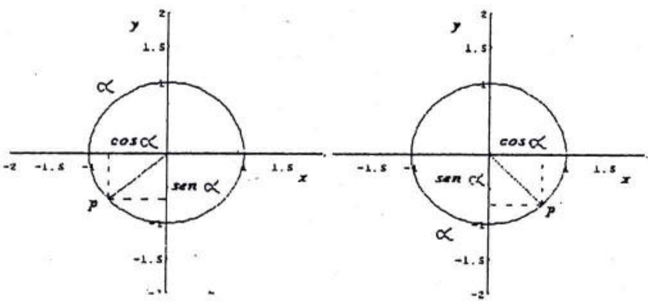

Figure 10.10: $sen\alpha$ e $cos\alpha$ nel III e IV quadrante

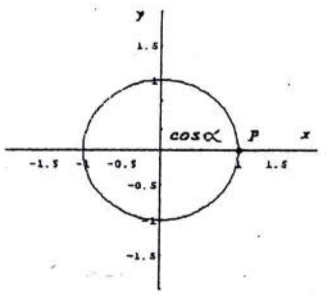

Figure 10.11: $sen0$ e $cos0$

$$sen0 = 0, \qquad cos0 = 1$$

Lo stesso risultato si ottiene per $\alpha = 2\pi$ oppure per $\alpha = -2\pi$ cioè

$$\begin{aligned} sen2\pi &= sen\left(-2\pi\right) = sen2k\pi = 0 \qquad \forall k \in Z \\ \cos 2\pi &= \cos\left(-2\pi\right) = \cos 2k\pi = 1 \qquad \forall k \in Z \end{aligned}$$

Esempio Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e $P\left(0, 1\right)$ cioè si trova sull' asse y, in base alla definizione data risulta dalla figura 10.12:

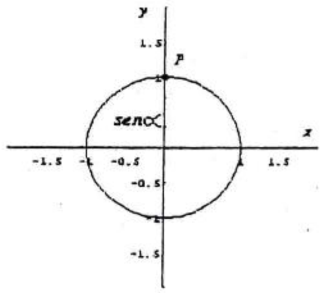

Figure 10.12: $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Esempio Se $\alpha = \pi$ e $P(-1,0)$ cioè si trova sull' asse x, in base alla definizione data risulta (vedi figura 10.13) :

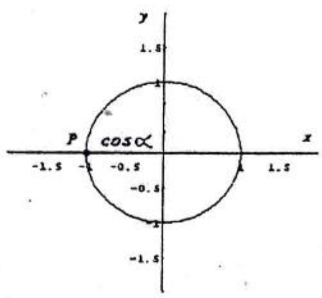

Figure 10.13: $\text{sen}\pi$ e $\cos\pi$

cioè

$$sen\pi = 0, \qquad \cos\pi = -1$$

Infine se $\alpha = \frac{3}{2}\pi$ e $P(0,-1)$ cioè si trova sull' asse y, in base alla definizione data risulta (come si può verificare facendo riferimento alla figura 10.14) :

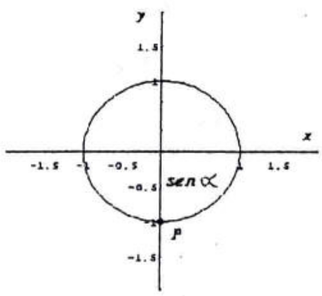

Figure 10.14: sen$\frac{3}{2}\pi$ e cos$\frac{3}{2}\pi$

$$sen\frac{3}{2}\pi = -1, \qquad \cos\frac{3}{2}\pi = 0$$

Osservazione Dalla definizione data segue che le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π cioè:

$$\begin{aligned} sen\,(\alpha + 2\pi) &= sen\alpha \\ \cos\,(\alpha + 2\pi) &= \cos\alpha \end{aligned}$$

Esercizio Stabilire per quali valori di $\alpha \in [0, 2\pi]$ risulta $sen\alpha = 0$.

Le soluzioni sono (vedi figura 10.15):

$$\alpha = 0, \qquad \alpha = \pi, \qquad \alpha = 2\pi$$

Stabilire per quali valori di $\alpha \in [0, 2\pi]$ risulta $\cos\alpha = 0$.
dal grafico di figura 10.16 risulta:

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \qquad \alpha = \frac{3}{2}\pi$$

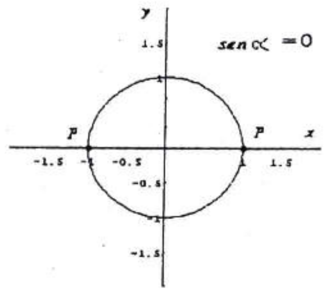

Figure 10.15: Soluzioni di sen$\alpha = 0$

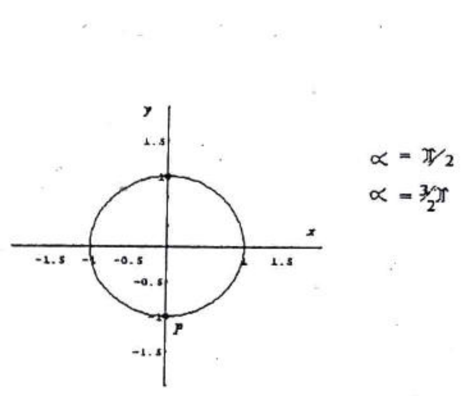

Figure 10.16: Soluzioni di $cos\alpha = 0$

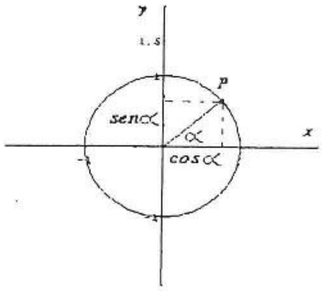

Figure 10.17: Positività di senα

Esercizio Determinare i valori, nell' intervallo: $[0, 2\pi]$ in cui risulta $sen\alpha > 0$.

Dalla figura 10.17 si ricava che la disequazione trigonometrica è soddisfatta per $0 < \alpha < \pi$.

Analogamente si vede che

$$sen\alpha < 0 \qquad per \qquad \pi < \alpha < 2\pi;$$

$$cos\alpha > 0 \qquad per \qquad 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3}{2}\pi < \alpha \leq 2\pi,$$

$$cos\alpha < 0 \qquad per \qquad \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3}{2}\pi$$

Esercizi Determinare tutti i numeri reali α per cui risulta:

$sen\alpha = 0$ per $\alpha = k\pi \ \forall \ k \in Z$

Suggerimento: dall' esercizio precedente e per la periodicità di senα, che risulta periodica di periodo 2π, si ha: $\alpha = 0 + 2k\pi$ e $\alpha = \pi + 2k\pi \ \forall k \in Z$ e quindi più sinteticamente la soluzione sopraindicata. Il suggerimento risulta valido anche per l' esercizio successivo.

$cos\alpha = 0$ per $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \ \forall \ k \in Z$
$sen\alpha = 1$ per $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \forall \ k \in Z$
$cos\alpha = 1$ per $\alpha = 2k\pi \ \forall \ k \in Z$
$sen\alpha = -1$ per $\alpha = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \ \forall \ k \in Z$
$cos\alpha = -1$ per $\alpha = (2k+1)\pi \ \forall \ k \in Z$

Esercizio Stabilire per quali numeri $\alpha \in [0, 2\pi]$ risulta $sen\alpha = \cos\alpha$.

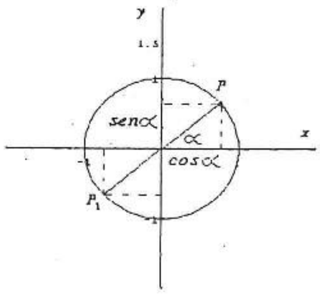

Figure 10.18: $\alpha = \frac{\pi}{4}$ e $\alpha = \frac{5}{4}\pi$

Risulta (vedi figura 10.18):

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \ \alpha = \frac{5}{4}\pi$$

Assumeremo nel seguito valide le

Identità

$$\begin{aligned} sen(-\alpha) &= -sen\alpha \\ cos(-\alpha) &= \cos\alpha \end{aligned}$$

che si ricavano facilmente dalla figura 10.19 :

Definizione Si definisce **tangente** di un angolo α l' ordinata del punto T d' intersezione della semiretta dell' angolo con la retta verticale $x = 1$ (vedi figura 10.20).

Dalla similitudine dei triangoli OPB e OAT risulta:

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$$

Il denominatore $cos\alpha$ deve essere diverso da zero e ciò accade per $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ \forall k \in Z$.

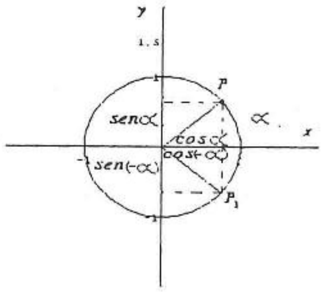

Figure 10.19: Valore di sen$(-\alpha)$ e cos$(-\alpha)$

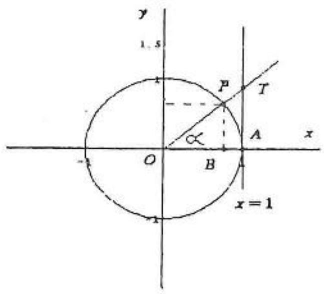

Figure 10.20: tangente di α

Quindi la funzione tangente è definita se $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.
La funzione tangente inoltre è **periodica** di periodo π, cioè

$$tg\,(\alpha + \pi) = tg\alpha \qquad \forall \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Le proprietà delle funzioni trigonometriche $sen\alpha, \cos\alpha, tg\alpha$ spesso sono riconducibili alla loro definizione, ma talvolta i loro grafici permettono più velocemente di ottenere tali proprietà. Riportiamo qui di seguito i grafici di queste funzioni (vedi figura 10.21).

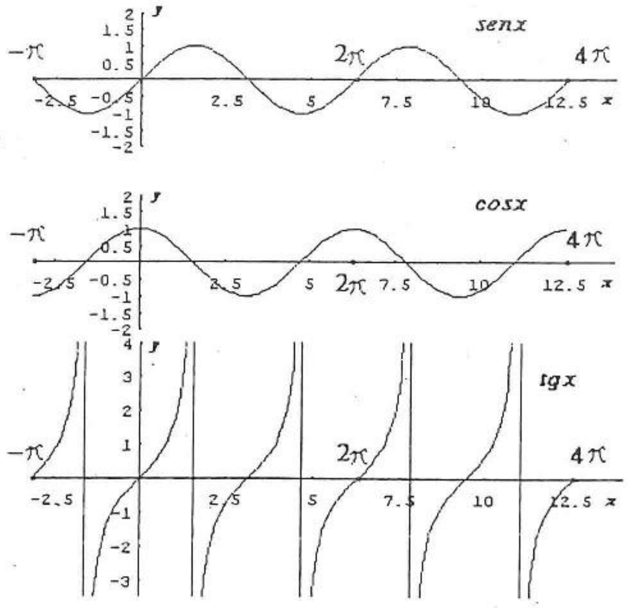

Figure 10.21: grafico di $senx$, $cosx$, tgx

10.3 Principali proprietà di $senx$, $cosx$, tgx.

Dalla definizione, così come dal grafico,delle funzioni $senx$ e $cosx$ risulta che:

$$-1 \leq senx \leq 1, \qquad -1 \leq \cos x \leq 1 \qquad \forall x \in \Re$$

cioè:

$$|sen x| \leq 1, \qquad |\cos x| \leq 1 \qquad \forall x \in \Re$$

Questi grafici sono stati ottenuti con l' uso ormai comune di macchine calcolatrici dotate di display oppure di PC.

In tali grafici si ritrovano contemporaneamente visualizzati alcuni valori noti delle funzioni trigonometriche, ad esempio $sen 0 = 0, \cos 0 = 1, \ldots$

Valori di angoli classici come $30°, 45°, 60°$ (in radianti $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$) non sono desumibili in **modo esatto** dal grafico ma vanno riottenuti da ragionamenti di tipo geometrico sui triangoli isasceli ed equilateri che vedremo nel seguito. Si riportano per completezza nella seguente tabella delle corrispondenze utili per il proseguimento del corso.

α radianti	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\left(\frac{3}{2}\right)\pi$	2π
α gradi	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	180	$270°$	$360°$
$sen\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	*indefinita*	0	*indefinita*	0

10.4 Trigonometria piana applicata ai triangoli

Nella tavola precedente sono indicati i valori di $sen\alpha, \cos\alpha, tg\alpha$, in particolare per $\alpha = 30°, 45°, 60°$.

Verifichiamo intanto che

$$sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Il triangolo ABC è rettangolo in $\widehat{A}$, ha l' ipotenusa $\overline{CB}$ di lunghezza 1 e l' angolo $B\widehat{C}A$ risulta di 30°. Da quanto posto segue che l' angolo in $\overline{B}$ vale 60°.

Perciò il triangolo BCB_1, ottenuto raddoppiando il triangolo BCA rispetto al lato $\overline{CA}$ ha i tre angoli uguali e risulta quindi equilatero. Dunque $\overline{BB_1} = 1$ e $\overline{AB} = \frac{1}{2}$.

Inoltre $\overline{AB} = sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

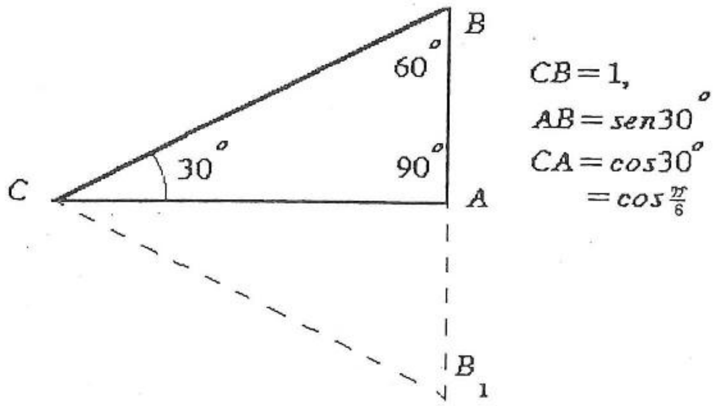

Figure 10.22: Seno e coseno di 30°

$\overline{AC}$ è l' altezza del triangolo BB_1C e cateto del triangolo ABC. Ne segue che:

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ con\ \overline{AC} &= \cos\frac{\pi}{6} \qquad \text{e quindi} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Verifichiamo ora che

$$sen\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Si ha $\widehat{C} = 45° \Rightarrow \widehat{C} = 45°$, quindi il triangolo ABC risulta isoscele con $\overline{AB} = \overline{AC}$. Per il teorema di Pitagora si ha: $1 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = 2\overline{AB}^2$, ma $\overline{AB}^2 = \frac{1}{2}$ e quindi $\overline{AB} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ne segue che
$sen\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
$cos\frac{\pi}{4} = \overline{AC} = \overline{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
$cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Verifichiamo ora che

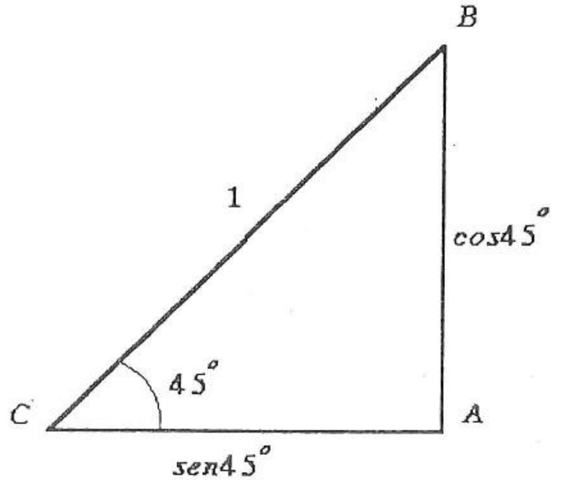

Figure 10.23: Seno e coseno di 45°

$$sen\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

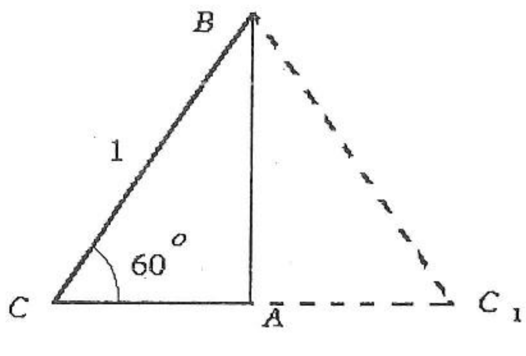

Figure 10.24: Seno e coseno di 60°

Il triangoloBCC_1 , ottenuto raddoppiando il triangolo ACB rispetto al lato $\overline{AB}$ è equilatero, quindi $\overline{CC_1} = 1$, $\overline{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow cos\frac{\pi}{3} = \overline{AC} = \frac{1}{2}$ mentre $sen\frac{\pi}{3} = \overline{AB} = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

10.4.1 Teoremi sui triangoli rettangoli.

Si consideri ora una triangolo rettangolo ABC, rettangolo in $\widehat{A}$. Supponiamo che il lato $\overline{CB}$ abbia lunghezza maggiore di 1 (per semplicità di disegno, l' essenziale è giungere a delle conclusioni per un triangolo rettangolo con ipotenusa $\neq 1$).

Con centro in $\widehat{C}$ tracciamo una circonferenza (tratteggiata in figura) di raggio 1 che incontra l' ipotenusa $\overline{CB}$ nel punto B_1. Da B_1 mandiamo la perpendicolare ad $\overline{AC}$ ed individuiamo così A_1.

Per definizione risultano le seguenti eguaglianze:

$$sen\alpha = \overline{A_1B_1} \qquad cos\alpha = \overline{CA_1}$$

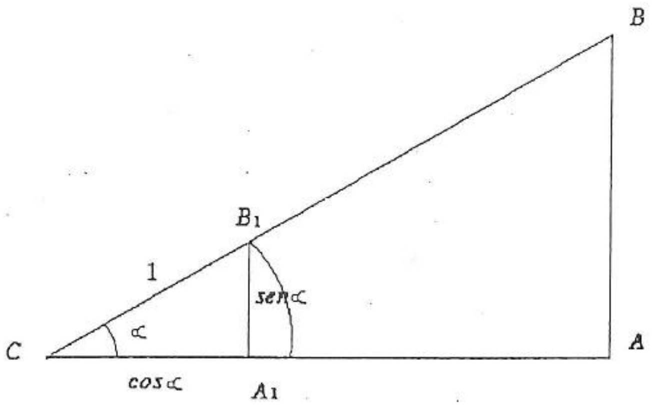

Figure 10.25: $\overline{AB} = \overline{CB}sen\alpha$

Per le proprietà dei triangoli simili (i triangoli ABC e A_1B_1C sono simili perchè hanno angoli corrispondenti uguali tra loro) vale:

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{CB_1}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}$$

ed inoltre si ha:

$$\overline{CB_1} = 1, \qquad sen\alpha = \overline{A_1B_1} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}$$

quindi vale il seguente

Teorema In un triangolo rettangolo la lunghezza di un cateto è uguale alla lunghezza dell' ipotenusa per il seno dell' angolo opposto ovvero

$$\overline{AB} = \overline{CB}sen\alpha$$

Analogamente per il coseno si ottiene:

$$\frac{\overline{CA_1}}{\overline{CB_1}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$$

ed inoltre:

$$\overline{C_1A_1} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}, \qquad cos\alpha = \overline{CA_1} = \frac{\overline{CA}}{CB}$$

da cui il seguente

Teorema In un triangolo rettangolo la lunghezza di un cateto è uguale a quella dell' ipotenusa per il coseno dell' angolo adiacente ovvero

$$\overline{CA} = \overline{CB}cos\alpha$$

Poichè sono valide le seguenti:
$\overline{CA} = \overline{CB}cos\alpha$,
$\overline{AB} = \overline{CB}sen\alpha$
si ricava immediatamente:
$\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CB}sen\alpha}{\overline{CB}cos\alpha} = tg\alpha$ e quindi il seguente

Teorema In un triangolo rettangolo la lunghezza di un cateto è uguale alla lunghezza dell' altro cateto per la tangente dell' angolo opposto ovvero

$$\overline{AB} = \overline{AC}tg\alpha$$

Vale inoltre la seguente

Identità Applicando il teorema di Pitagora al triangolo OPB , figura 10.20, risulta

$$\overline{PB}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{OP}^2$$

e passando alle misure si ha:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \tag{10.2}$$

detta **identità trigonometrica fondamentale.**
Inoltre dalla similitudine dei triangoli OPB e OTA risulta:

$$\overline{BP} : \overline{OB} = \overline{AT} : \overline{OA}$$

e passando alle misure si ottiene:

$$sen\alpha : cos\alpha = tg\alpha : 1$$

da cui ritroviamo che

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} \tag{10.3}$$

Esempio Un angolo α del secondo quadrante ha $sen\alpha = \frac{2}{3}$.

Determinare il coseno e la tangente dell' angolo α.
Dalla relazione (10.2)si ricava:

$$cos\alpha = \pm\sqrt{1 - sen^2\alpha}$$

Essendo l' angolo α nel secondo quadrante il segno del coseno è negativo, perciò si ha:

$$cos\alpha = -\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Dalla relazione (10.3) si ricava:

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Esempio In un triangolo rettangolo un cateto misura $12m$ e l' angolo acuto adiacente è di 65°. Determinare gli altri elementi del triangolo.

Si ricavano:
l' angolo acuto $\gamma = 90° - 65° = 25°$
il cateto $b = c \cdot tg\alpha = 12 \cdot tg65° \simeq 25,734m$
l' ipotenusa $a = \frac{c}{sen\gamma} = \frac{12}{sen25°} \simeq 28,394m$

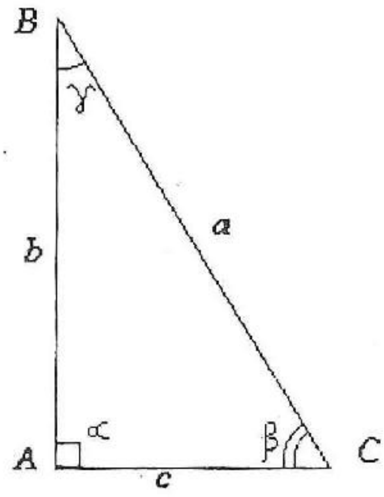

Figure 10.26: Triangolo con $c = 12m$ e $\beta = 65°$

10.5 Interpretazione goniometrica del coefficiente angolare della retta.

La funzione $y = mx$ definita in $\Re$ ha per grafico una retta, della quale m è detto coefficiente angolare.

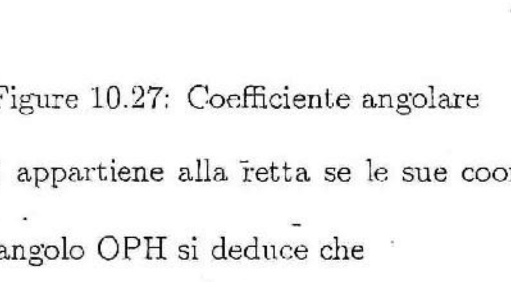

Figure 10.27: Coefficiente angolare

Un punto $P(x, y)$ appartiene alla retta se le sue coordinate soddisfano alla relazione $\frac{y}{x} = m$.

Dal triangolo rettangolo OPH si deduce che

$$\overline{PH} = \overline{OH} \cdot tg\alpha$$

dove α è la misura dell' angolo che la retta forma con la direzione positiva dell' asse delle x. Passando alle misure si ha: $y = x \cdot tg\alpha$; quindi

$$m = tg\alpha$$

Osservazione Il coefficiente angolare di una retta è la tangente goniometrica dell' angolo che la retta forma con la direzione positiva dell' asse delle x.

Esempio La retta $y = x$, bisettrice del primo e terzo quadrante, ha coefficiente angolare uguale a 1; infatti:

$$m = tg\frac{\pi}{4} = 1$$

Esempio La retta di equazione $y = -2x$ ha coefficiente angolare -2 e forma con la semiretta positiva dell' asse delle x un angolo α ottuso, soluzione dell' equazione $tg\alpha = -2$, ossia $\alpha = 116°24'$ (circa).

Esempio determinare l' equazione della retta che passa per il punto $P\,(3, 2)$ e forma con la direzione positiva dell' asse delle ascisse un angolo di 60°.

L' equazione del fascio di rette passante per il punto P, come è noto, è data da:

$$y - 2 = m\,(x - 3)$$

Il coeffficiente angolare della retta cercata è:

$$m = tg60° = \sqrt{3}$$

perciò l' equazione della retta è:

$$y = \sqrt{3}x + 2 - 3\sqrt{3}$$

$$\overline{PH} = \overline{OH} \cdot tg\alpha$$

dove α è la misura dell' angolo che la retta forma con la direzione positiva dell' asse delle x. Passando alle misure si ha: $y = x \cdot tg\alpha$; quindi

$$m = tg\alpha$$

Osservazione Il coefficiente angolare di una retta è la tangente goniometrica dell' angolo che la retta forma con la direzione positiva dell' asse delle x.

Esempio La retta $y = x$, bisettrice del primo e terzo quadrante, ha coefficiente angolare uguale a 1; infatti:

$$m = tg\frac{\pi}{4} = 1$$

Esempio La retta di equazione $y = -2x$ ha coefficiente angolare -2 e forma con la semiretta positiva dell' asse delle x un angolo α ottuso, soluzione dell' equazione $tg\alpha = -2$, ossia $\alpha = 116°24'$ (circa).

Esempio determinare l' equazione della retta che passa per il punto $P\,(3,2)$ e forma con la direzione positiva dell' asse delle ascisse un angolo di 60°.

L' equazione del fascio di rette passante per il punto P, come è noto, è data da:

$$y - 2 = m\,(x - 3)$$

Il coeffficiente angolare della retta cercata è:

$$m = tg60° = \sqrt{3}$$

perciò l' equazione della retta è:

$$y = \sqrt{3}x + 2 - 3\sqrt{3}$$

10.6 Formulario

Segue un riepilogo delle formule trigonometriche maggiormente utilizzate.

Relazioni fra le principali funzioni goniometriche:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \qquad tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} \qquad cotg\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}$$

Periodicità delle funzioni seno, coseno e tangente

$$sen\alpha = sen\,(\alpha + 2k\pi) \qquad cos\alpha = cos\,(\alpha + 2k\pi) \qquad tg\alpha = tg\,(\alpha + k\pi)$$

Archi associati

$$sen\,(-\alpha) = -sen\alpha \qquad sen\,(\pi - \alpha) = sen\alpha \qquad sen\,(\pi + \alpha) = -sen\alpha$$

$$cos\,(-\alpha) = cos\alpha \qquad cos\,(\pi - \alpha) = -cos\alpha \qquad cos\,(\pi + \alpha) = -cos\alpha$$

$$tg\,(-\alpha) = -tg\alpha \qquad tg\,(\pi - \alpha) = -tg\alpha \qquad tg\,(\pi + \alpha) = tg\alpha$$

$$sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = cos\alpha \qquad cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = sen\alpha \qquad tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{tg\alpha}$$

Formule di addizione

$$sen\,(\alpha + \beta) = sen\alpha cos\beta + cos\alpha sen\beta$$

$$cos\,(\alpha + \beta) = cos\alpha cos\beta - sen\alpha sen\beta$$

$$tg\,(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}$$

Formule di sottrazione

$$sen\,(\alpha - \beta) = sen\alpha cos\beta - cos\alpha sen\beta$$

$$cos\,(\alpha - \beta) = cos\alpha cos\beta + sen\alpha sen\beta$$

$$tg\,(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$$

Formule di duplicazione

$$sen2\alpha=2sen\alpha cos\alpha$$

$$cos2\alpha=cos^2\alpha-sen^2\alpha$$

$$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

Formule parametriche

$$sen\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}\qquad cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

Formule di prostaferesi

$$senp+senq=2sen\frac{p+q}{2}cos\frac{p-q}{2}$$

$$senp-senq=2sen\frac{p-q}{2}cos\frac{p+q}{2}$$

$$cosp+cosq=2cos\frac{p+q}{2}cos\frac{p-q}{2}$$

$$cosp-cosq=-2sen\frac{p+q}{2}sen\frac{p-q}{2}$$

Esempio (di applicazione delle formule di addizione). Calcolare le funzioni goniometriche dell' angolo di 105°.

L' angolo di 105° può essere scritto $105° = 60° + 45°$.
Applicando le precedenti relazioni si ottiene:

$$\begin{aligned} sen105° &= sen\,(60° + 45°) = sen60° cos45° + sen45° cos60° = \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cos105° &= cos\,(60° + 45°) = cos60° cos45° - sen45° sen60° = \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} tg105° &= tg\,(60° + 45°) = \frac{tg60° + tg45°}{1 - tg60° \cdot tg45°} = \\ \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} &= \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{1-3} = -2-\sqrt{3} \end{aligned}$$

10.7 Esercizi proposti

Esercizio Un arco di circonferenza avente raggio 3 cm è lungo 8 cm. Determinare un valore approssimato della misura dell' angolo al centro corrispondente in radianti ed in gradi sessagesimali.

[$\alpha^{(r)} = \frac{8}{3} rad$; $\alpha° \simeq 152°47'19'',5$]

Esercizio Un angolo al centro di una circonferenza di raggio 5 cm misura 1,85 radianti. Determinare la misura dell' arco corrispondente.

[$l = 1,85$ in archi radianti, $l = 9,25$ in cm]

Esercizio Nota una funzione goniometrica in un certo quadrante, calcolare le altre funzioni e rappresentarle sulla circonferenza goniometrica.

$sen\alpha° = \frac{1}{4}$	$0° < \alpha° < 90°$	[$cos\alpha° = +\frac{\sqrt{15}}{4}$; $tg\alpha° = +\frac{\sqrt{15}}{15}$]
$cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$	[$sen\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$; $tg\alpha = -\frac{\sqrt{14}}{2}$]
$tg\alpha° = -\frac{1}{2}$	$90° < \alpha° < 180°$	[$sen\alpha° = +\frac{\sqrt{5}}{5}$; $cos\alpha° = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$]