# Chapter 7

# Funzioni, potenze.

## 7.1 Funzioni.

### 7.1.1 Funzioni matematiche e funzioni empiriche.

Di particolare interesse sono le funzioni fra due insiemi numerici, dette funzioni numeriche. Esse si distinguono in *funzioni matematiche* e *funzioni empiriche.*

Sono funzioni matematiche quelle che si possono esprimere mediante una formula come, ad esempio:

$$y = 3x \qquad y = x + 6 \qquad y = 2x + 1$$

$$y = \frac{1}{2}x \qquad y = x^2 \qquad y = \sqrt{x}$$

**Definizione** Nelle *funzioni matematiche* il legame esistente fra le due variabili $x$ ed $y$ è dato da una relazione matematica che consente di far corrispondere ad ogni valore assegnato alla $x$ , scelto in un opportuno insieme, il corrispondente valore di $y$.

**Definizione** Una funzione si dice *empirica* quando la relazione che lega le grandezze non è di natura matematica. In tal caso per avere dei valori corrispondenti delle varie grandezze è necessario ricorrere ad esperienze, osservazioni o rilevazioni dirette.

Citiamo a titolo illustrativo alcuni esempi di funzioni empiriche:
- la temperatura di una data località misurata ad opportuni intervalli di tempo (ad esempio ogni ora);
- la produzione del frumento in una data regione nei vari anni in cui viene rilevata;
- il numero dei nati in una data località nei vari anni in cui viene registrato;
- il peso di un bambino nel primo anno di vita, rilevato ad ogni mese.

Per poter studiare una funzione empirica occorre avere a disposizione una tabella nella quale, in corrispondenza dei valori della variabile indipendente, siano indicati i corrispondenti valori della funzione. Nella tabella seguente abbiamo, ad esempio, riportato le temperature rilevate in un determinato ambiente, dopo,averle misurate ogni tre ore nel corso di un giorno.

| Ore | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Temperature $°C$ | 2 | 1 | 10 | 13 | 18 | 16 | 9 | 5 | 3 |

In generale, anche quando la relazione fra le grandezze considerate non è di natura matematica, dall' esame dei dati rilevati si possono dedurre importanti conseguenze e risalire eventualmente alle cause dei fatti considerati ed alla loro interpretazione. In certi casi l' esame dei valori rilevati dalle grandezze considerate pone in evidenza un legame di natura matematica fra le grandezze stesse.

### 7.1.2 Insiemi numerici direttamente proporzionali.

Consideriamo i seguenti insiemi numerici $X$ ed $Y$ aventi lo stesso numero di elementi:

$$X = \{2, 10, 11, 15, 20\}$$

$$Y = \{6, 30, 33, 45, 60\}$$

e chiamiamo corrisponedenti due numeri, l' uno del primo e l' altro del secondo insieme, che occupano lo stesso posto. Ad esmpio, il numero 2 di $X$ ed il numero 6 di $Y$ , che occupano nei rispettivi insiemi il primo posto, sono corrispondenti; 10 e 30, che occupano il secondo posto, sono corrispondenti e così via.

I due insiemi $X$ ed $Y$ presentano le seguenti particolarità:

*a) ad ogni numero del primo insieme corrisponde un solo numero del secondo insieme e, viceversa, ad ogni numero del secondo insieme corrisponde un solo numero del primo, cioè la corrispondenza fra $X$ ed $Y$ è biunivoca.*

*b) Il rapporto fra un qualsiasi numero di $Y$ ed il suo corrispondente in $X$ è costante e cioè conserva lo stesso valore qualunque sia la coppia di elementi corrispondenti per cui viene calcolato.*

**Definizione** Se risultano verificate le due condizioni a) e b) diciamo che esiste una proporzionalità diretta fra $X$ ed $Y$ o che i due insiemi $X$ ed $Y$ sono **direttamente proporzionali.**

Infatti:

$$\frac{6}{2} = 3 \qquad \frac{30}{10} = 3 \qquad \frac{33}{11} = 3 \qquad \frac{45}{15} = 3 \qquad \frac{60}{20} = 3$$

cioè:

$$6 : 2 = 30 : 10 = 33 : 11 = 45 : 15 = 60 : 20 = 3$$

Il valore costante di questi rapporti è 3, e si chiama *coefficiente di proporzionalità diretta fra $X$ ed $Y$* .

Osserviamo che un qualsiasi numero dell' insieme $Y$ si ottiene moltiplicando il suo corrispondente in $X$ per il coefficiente di proporzionalità diretta. Viceversa un qualsiasi numero di $X$ si ottiene dividendo il suo corrispondente in $Y$ per il coefficiente di proporzionalità diretta.

**Definizione** Se fra due insiemi numerici $X$ ed $Y$ esiste una corrispondenza biunivoca e se il rapporto fra un qualsiasi numero di $Y$ ed il suo corrispondente in $X$ è costante, si dice che esiste una **proporzionalità diretta** fra $X$ ed $Y$ o che i due insiemi sono direttamente proporzionali. Il valore costante del rapporto si dice coefficiente di proporzionalità diretta fra $X$ ed $Y$.

Gli elementi corrispondenti fra due insiemi $X$ ed $Y$ si possono rappresentare mediante una tabella orizzontale o verticale. A fianco o al di sopra della tabella poniamo la lettera "D" per indicare che i due insiemi sono direttamente proporzionali.

| X | 2 | 10 | 11 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| Y | 6 | 30 | 33 | 45 | 60 |

Osserviamo ancora che il rapporto fra due numeri qualsiasi dell' insieme $X$ , ad esmpio 2 e 10, è uguale al rapporto fra i corrispondenti 6 e 30 del secondo insieme $Y$. Infatti:

$$\frac{2}{10} = \frac{1}{5} \qquad \text{e} \qquad \frac{6}{30} = \frac{1}{5} \qquad \text{da cui} \qquad 2 : 10 = 6 : 30$$

e così pure

$$10 : 15 = 30 : 45 \qquad 20 : 11 = 60 : 33 \qquad \text{ecc.}$$

Pertanto possiamo affermare che:

**Osservazione** Se due insiemi numerici sono direttamente proporzionali, il rapporto fra due numeri qualsiasi del primo insieme è uguale al rapporto fra i corrispondenti numeri del secondo insieme.

**Definizione** Due grandezze si dicono *direttamente proporzionali* se fra l' insieme $X$ dei valori dell' una e l' insieme $Y$ dei corrispondenti valori dell' altra esiste una proporzionalità diretta.

Sono esempi di grandezze direttamente proporzionali:

- il peso di una determinata sostanza e il suo volume;

- il lato di un poligono regolare di un numero fissato di lati ed il perimetro del poligono;

- il numero dei pezzi prodotti da una determinata macchina automatica ed il tempo impiegato per produrli;

- il percorso compiuto da un automezzo ed il tempo impiegato per percorrerlo con velocità costante;

- la quantità di lavoro eseguita da un operaio ed il tempo impiegato per eseguirla;

- la quantità di lavoro eseguita ed il numero di operai impiegati;

- il numero di ore di lavoro effettuate e la corrispondente retribuzione;

- le aree dei rettangoli aventi tutti una base fissata e le misure delle rispettive altezze.

**Osservazione** Se due grandezze sono direttamente proporzionali il rapporto fra due qualsiasi valori di una di esse è uguale al rapporto fra i corrispondenti valori dell' altra.

**Criterio di proposrzionalità diretta.** *(7.1.2 ).* Due grandezze variabili dipendenti l' una dall' altra sono **direttamente proporzionali** se, quando una di esse diventa doppia, tripla, quadrupla, ecc., anche l' altra diventa doppia, tripla, quadrupla, ecc.

### 7.1.3 Legge della proporzionalità diretta e sua rappresentazione cartesiana

Riprendiamo in esame la tabella che abbiamo esaminato precedentemente. Ricordando che, dati due insiemi numerici $X$ ed $Y$ direttamente proporzionali, il rapporto fra un qualsiasi numero di $Y$ ed il corrispondente numero di $X$ è costante, possiamo scrivere:

$$\frac{6}{2}=\frac{30}{10}=\frac{33}{11}=\frac{45}{15}=\frac{60}{20}=.......=\frac{y}{x}$$

Se $y$ è il valore generico di un elemento dell' insieme $Y$ ed $x$ il corrispondente valore di tale elemento nell' insieme $X$ possiamo scrivere, essendo 3 il coeffieciente di proporzionalità fra $X$ ed $Y$ :

$$\frac{y}{x}=3 \qquad \text{o anche} \qquad y=3x$$

In generale, indicando con $m$ il coefficiente di proporzionalità diretta, abbiamo il seguente

**Teorema** Date due grandezze x ed y direttamente proporzionali è possibile rappresentare il loro legame nella forma

$$\frac{y}{x}=m \qquad ossia \qquad y=mx$$

Le seguenti formule esprimono leggi di proporzionalità diretta:

$$\frac{y}{x}=2 \qquad \text{ossia} \qquad y=2x$$

$$\frac{y}{x} = 500x \qquad \text{ossia} \qquad y = 500x$$

Rappresentiamo in forma cartesiana le leggi di proporzionalità diretta:

$$y = 2x \qquad \text{e} \qquad y = 500x$$

Costruiamo prima le tabelle dei valori corrispondenti:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | .... |
| y | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | .... |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | .... |
| y | 0 | 500 | 1000 | 1500 | 2000 | .... |

Il grafico associato alla prima tabella risulta in figura 7.1.

Naturalmente nel secondo caso dobbiamo scegliere unità di misura diverse sui due semiassi ( vedi figura 7.2).

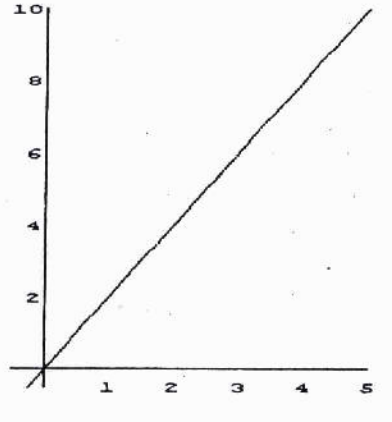


Figure 7.1: grafico di $y = 2x$

In entrambi i casi abbiamo ottenuto per diagramma una semiretta avente l' origine nell' origine degli assi. In generale:

**Osservazione** Ogni funzione rappresentata da una relazione del tipo:

$$\frac{y}{x} = m \qquad \text{ossia} \qquad y = mx$$

che esprime la legge della proporzionalità diretta, ha per diagramma una semiretta avente l' origine nell' origine degli assi.

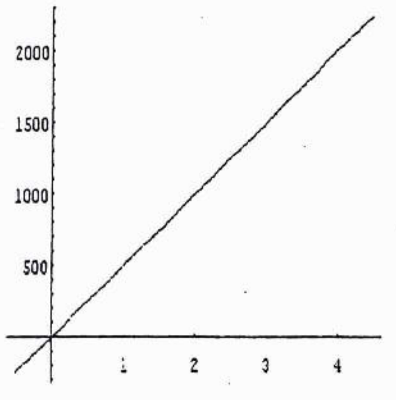


Figure 7.2: grafico di $y = 500x$

### 7.1.4 Le scale termometriche.

I termometri utilizzati per misurare la temperatura dei corpi non sono tutti uguali: in Italia una normale influenza causa una febbre con $39°C$ di temperatura, mentre in alcuni paesi anglosassoni è segnalata una temperatura di $102°F$.

La ragione di queste differenze è dovuta ad alcuni studiosi, che dal 1600 ad oggi hanno compiuto ricerche di termodinamica e che hanno costruito i termometri utilizzando scale diverse. Gli scienziati Rèaumur e Celsius, avendo constatato che le temperature di congelamento e di ebollizione dell' acqua sono sempre le stesse, decisero di costruire i loro termometri in modi diversi: Celsius fissò la temperatura di fusione del ghiaccio a $0°C$ e quella di ebollizione a $100°C$, Rèaumur stabilì $0°R$ per la fusione del ghiaccio e $80°R$ per l' ebollizione dell' acqua.

Fahrenheit pensò invece di aver raggiunto la temperatura più bassa possibile in natura ghiacciando del sale ammonico. Assegno il valore di 0° alla temperatura determinata in questo modo e pensò di suddividere in $180°F$ la differenza fra la temperatura di congelamento dell' acqua e quella di ebollizione; calcolò così che l' acqua congela a $32°F$ e bolle a $212°F$.

Lo zero assoluto, cioè la temperatura più bassa possibile, fu calcolato più tardi dal fisico inglese William Thomson , il quale osservò che a tale temperatura l' energia contenuta in ogni corpo deve risultare nulla. Riferendosi alla scala centigrada di Celsius calcolò lo zero assoluto a $-273,16°C$. Tale valore viene di solito arrotondato a $-273°C$.

Alla temperatura dello zero assoluto si annulla la velocità dei moti di agitazione delle molecole di qualsiasi sostanza; nel 1962 William Thomson , che divenne poi lord Kelvin, propose di far coincidere lo zero della scala con questa temperatura.

In tal modo non esistono temperature negative ed i valori delle temperature secondo quewsta nuova scala si ottengono da quelle della scala centtigrada Celius addizionando ad esse il numero 273.

Quindi:

$$K =^\circ C + 273$$

Questa nuova scala prende il nome di scala Kelvin o scala assoluta.

L' intervallo di temperatura di un grado della scala Kelvin è uguale a quello di un grado della scala Celsius in quanto corrisponde alla centesima parte dell' intervallo fra il punto di fusione del ghiaccio ed il punto di ebollizione dell' acqua.

Il sistema internazionale di Misura, S.I., usa la scala Kelvin ed il grado di questa scala è una delle sette unità fondamentali di misura.

Rappresentiamo con un disegno le quattro scale termometriche usate (figura 7.3).

Le proporzioni:

$$^\circ C : 100 =^\circ R : 80$$

$$^\circ C : 100 = (^\circ F - 32) : (212 - 32)$$

$$^\circ R : 80 = (^\circ F - 32) : (212 - 32)$$

e l' eguaglianza:

$$K =^\circ C + 273 \qquad \text{ossia} \qquad ^\circ C = K - 273$$

consentono di trasformare una temperatura espressa in una determinata scala nella stessa temperatura espressa in un' altra scala. Nella seguente tabella sono riportati tutti i casi possibili (notare il rapporto di proporzionalità diretta):

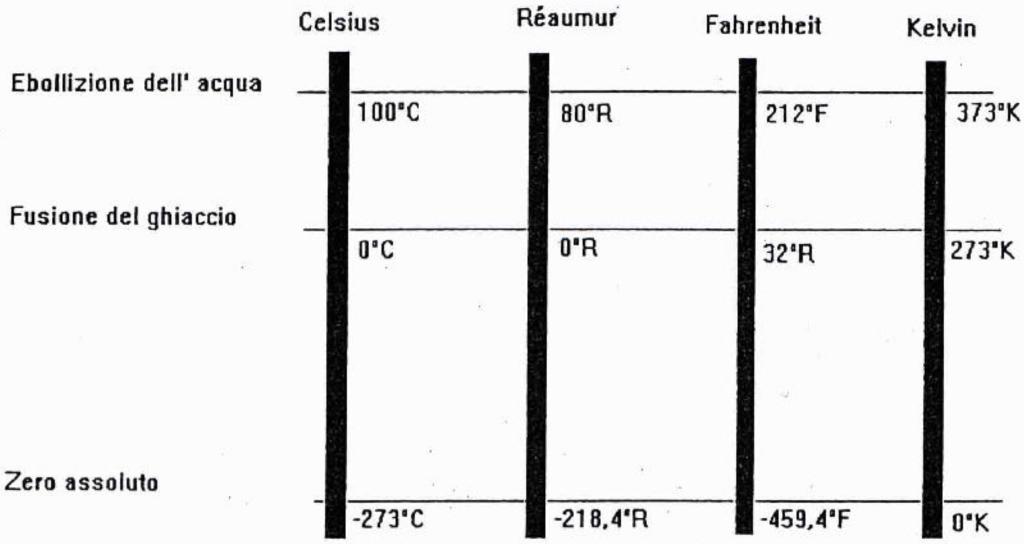


Figure 7.3: grafico delle scale termometriche

| in funzione di | $°C$ | $°R$ | $°F$ | $°K$ |
|---|---|---|---|---|
| $°C =$ | $°C$ | $\frac{5}{4}°R$ | $\frac{9}{5}(°F - 32)$ | $°K - 273$ |
| $°R =$ | $\frac{4}{5}°C$ | $°R$ | $\frac{9}{4}(°F - 32)$ | $\frac{4}{5}(°K - 273)$ |
| $°F =$ | $\frac{9}{5}°C + 32$ | $\frac{9}{4}°R + 32$ | $°F$ | $\frac{9}{5}(°K - 273) + 32$ |
| $°K =$ | $°C + 273$ | $\frac{5}{4}°R + 273$ | $\frac{5}{9}(°F - 32) + 273$ | $°K$ |

**Esercizio (Matematica e Fisica).** L' allungamento di una molla è direttamente proporzionale alla forza applicata secondo la seguente formula: $F = kx$, in cui $F$ indica la forza peso applicata alla molla espressa in N (il Newton N è l' unità di forza del S.I. e cioè la forza capace di imprimere alla massa di $1kg$ l' accelerazione di 1 metro al secondo per secondo $m/s^2$ ), $k$ è la costante di proporzionalità, $x$ è l' allungamento della molla espresso in $cm$. Si indichi con $x$ l' allungamento e con $y$ la forza peso. Sapendo che $k$ assume mediamente il valore di $0,8\ N/cm$ :

a) scrivere la funzione matematica utilizzando il coeffieciente di proporzionalità proposto;

b) completate la seguente tabella:

| x | 2,5 | 4,9 | 7,2 | 8,5 | 11,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | | | | | |

c) disegnare il diagramma della funzione.

**Esercizio** E' esatto affermare che la misura di una temperatura secondo la scala Celsius e la misura della stessa temperatura secondo la scala Réaumur sono grandezze direttamente proporzionali? E' esatto affermare che la misura di una temperatura secondo la scala Celsius e la misura della stessa temperatura secondo la scala Fahrenheit sono direttamente proporzionali? In caso affermativo individuare il coefficiente di proporzionalità diretta.

**Esercizio** Considerate l' insieme di tutti i triangoli indicati nel disegno, aventi tutti l' altezza di $1,5cm$ e la misura della base indicata in ciascuna figura.

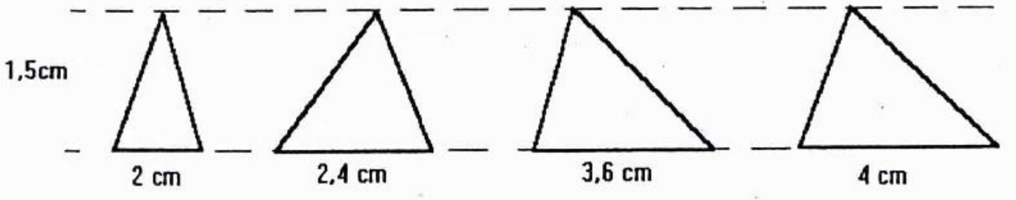


Figure 7.4: disegno dei triangoli

a) calcolate l' area di ciascun triangolo.

b) Dopo aver considerato altri triangoli aventi la stessa altezza di quelli dell' insieme assegnato, rappresentate con un diagramma cartesiano l' area dei triangoli in funzione della base.

c) Quale legge matematica rappresenta il diagramma ottenuto? Scrivete la formula che esprime tale legge nel caso esaminato.

**Esercizio (Matematica e Fisica).** E' noto che la pressione esercitata dal peso di un corpo su una superficiesi esprime come il rapporto fra il peso del corpo e la superficie d' appoggio: $pressione = \frac{peso}{superficie}$ pascal; 1 pascal che corrisponde alla pressione esercitata dalla forza di 1 newton che agisce perpendicolarmente sulla superficie di $1m^2$. Si consideri un oggetto di $15kg$ e si completi la seguente tabella:

| Superficie x ($cm^2$) | 1 | 3 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| Pressione y (kg) | .......... | .......... | ......... | ........ |

Stabilire:

a) che tipo di proporzionalità esiste fra le due grandezze (pressione e superficie d' appoggio),

b) al variare del peso dell' oggetto, mantenendo gli stessi valori della superficie d' appoggio, si crea una relazione fra la pressione $y$ ed il peso $x$. Indicate che tipo di proporzionalità si realizza.

**Esercizio** Il corpo umano ha la temperatura media di $37°C$. Esprimete tale temperatura in gradi Réaumur e in gradi Fahrenheit.

$[29,6°R, 98,6°F]$

### 7.1.5 Il titolo dei metalli preziosi.

Gli oggetti di metallo prezioso (oro, argento, platino, ecc..) non sono generalmente realizzati con metallo puro, ma , per esaltarne il colore, la durezza, la resistenza meccanica, la durata, ecc., si producono con leghe che contengono anche una certa quantità di metalli meno preziosi (molto frequentemente si usa il rame).

Il rapporto fra il peso del metallo prezioso contenuto in un oggetto ed il suo peso complessivo (metallo prezioso + metalli lega) si dice *titolo* e si esprime in *millesimi*.Tutti gli oggeti d' argento sono dotati di una minuscola incisione che dichiara il titolo del metallo prezioso ( che spesso nei vassoi d' argento è 800 millesimi). Ciò significa che su 1.000 parti ci lega 800 sono di argento puro.

Con una semplice proporzione è possibile determinare la quantità d' argento puro contenuta in un oggetto che pesa $1,68$ $kg$ ed ha un titolo di 750 millesimi $\left(\frac{750}{1000}\right)$ :

$$750 : 1000 = x : 1,68$$

$$x = \frac{750 \cdot 1,68}{1.000} = 1,25kg$$

Spesso i commercianti di metalli preziosi esprimono il titolo in *carati.* Il carato indica quante sono le parti di metallo prezioso puro contenute in 24 parti di lega. Ad esempio, oro a 18 carati $\left(\frac{18}{24}\right)$ significa che su 24 parti di lega 18 sono di oro puro.

Ad esempio proviamo ad esprimere in carati una lega d' oro di titolo $\frac{875}{1.000}$.

$$875 : 1.000 = x : 24$$

$$x = \frac{875 \cdot 24}{1.000} = 21 \ carati \ \left(\frac{21}{24}\right)$$

Allo stesso modo si calcoli quanto oro è contenuto in un anello d' oro a 18 carati (il titolo più diffuso in gioelleria) .

## 7.2 Forme quadratiche.

Errore comune ed abbastanza frequente è quello di affermare che due grandezze sono direttamente poroporzionali solo per il fatto che, aumentando il valore di una grandezza aumenta anche il valore dell' altra; bisogna necessariamente aggiungere, come enunciato nel criterio di proporzionalità diretta (7.1.2), che raddoppiando, triplicando, ecc. il valore di una grandezza, anche il corrispondente dell' altra si raddoppia, si triplica, ecc. L' area di un quadrato ed il suo lato sono, ad esempio, grandezze direttamente proporzionali pur risultando evidente che , aumentando il lato del quadrato, aumenta anche la sua area. Osserviamo infatti che, raddoppiando, triplicando, ecc. il lato del quadrato, la sua area non risulta moltiplicata per 2, per 3, ecc ma per 4, per 9, ecc. come segue:

$$\begin{aligned} l_1 &= 1 \ cm \\ A_1 &= (1 \cdot 1) \ cm^2 = 1 \ cm^2 \ (area) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_2 &= 2 \ cm \\ A_2 &= (2 \cdot 2) \ cm^2 = 4 \ cm^2 \ (area) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
l_3 &= 3\ cm \\
A3 &= (3 \cdot 3)\ cm^2 = 9\ cm^2\ (area)
\end{aligned}
$$

L' area di un quadrato è funzione del suo lato; ad ogni valore della lunghezza del lato corrisponde un solo valore dell' area che si determina banalmente elevando la misura della lunghezza del lato al quadrato. Se indichiamo con $x$ la misura della lunghezza del lato e con $y$ quella dell' area, abbiamo evidedentemente:

$$y = x^2$$

Questa è la funzione che esprime l' area $y$ di un quadrato al variare della lunghezza del suo lato. Sostituendo alla $x$ successivamente i valori $0, 1, 2, 3, ...$ troviamo i corrispondenti valori della $y$ che trascriviamo, unitamente ai primi in una tabella.

Fissato quindi un sistema di assi cartesiani e stabilite le rispettive unità di misura rappresentiamo i punti in tabella:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | .... |
| y | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | .... |

Il grafico relativo risulta nella figura 7.5.

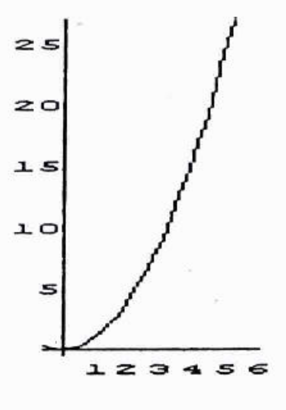


Figure 7.5: grafico di $y = x^2$

Si uniscano i punti ottenuti con una linea continua ed otteniamo il diagramma della funzione (il grafico relativo risulta nella figura 7.5 ):

$$y = x^2$$

che tanta importanza ha nella fisica. La linea è un ramo della curva detta parabola.

## 7.3 Potenze.

### 7.3.1 Concetto di potenza.

I seguenti prodotti di fattori uguali:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \qquad 5 \cdot 5 \cdot 5 \qquad 6,7 \cdot 6,7$$

Tali prodotti si chiamano potenze e si possono scrivere più brevemente come segue

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 \qquad 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 \qquad 6,7 \cdot 6,7 = 6,7^2$$

Pertanto

**Definizione** Si dice *potenza* di un numero un prodotto di più fattori uguali a quel numero.

**Definizione** Esaminiamo

$$5^3$$

5 è detto *base*, 3 è detto *esponente*.

### 7.3.2 Casi particolari.

In un prodotto i fattori devono essere almeno due e quindi non avrebbe senso paralare di potenza con esponente uguale a zero oppure a uno.

Allo scopo di dare una maggiore generalità al simbolo di potenza è stato convenuto che anche le scritture $5^1, 7^0, ecc.$ abbiano un significato.

**a)** la potenza con esponente zero di un numero qualsiasi (fatta eccezione per lo zero) è sempre uguale a 1.

Si conviene cioè che

$$5^0 = 1 \qquad 7^0 = 1 \qquad 8,25^0 = 1$$

Al simbolo $0^0$ non viene attrinuito alcun significato.

**b)** la potenza di un numero qualsiasi con esponente uguale a 1 è uguale al numero stesso:

$$7^1 = 7 \qquad 5^1 = 5 \qquad 7,34^1 = 7,34 \qquad 0^1 = 0$$

In genere l' esponente 1 non si scrive ma si sottintende.

**c)** Qualunque potenza di 0 escluso quella con esponente 0 è uguale a 0.

$$0^3 = 0 \qquad 0^5 = 0$$

**d)** Qualunque potenza di 1 è uguale a 1.

$$1^3 = 1 \qquad 1^5 = 1$$

**e)** Una potenza del dieci è uguale al numero formato dall' unità seguito da tanti zeri quante sono le unità dell' esponente.

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 100$$

$$10^3 = 1000$$

$$10^0 = 1$$

Le espressioni precedenti sono valide anche in senso inverso.

**Proposizione** Il prodotto di due potenze aventi la stessa base è la potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Ad esempio si ha:

$$4^3 \cdot 4 \cdot 4^2 = 4^{3+1+2} = 4^6$$

**Proposizione** Il quoziente di due potenze aventi la stessa base è la potenza avente per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti ( se l' esponente del dividendo non è minore dell' esponente del divisore).

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

Ad esempio si ha:

$$7^5 : 7^3 = 7^{5-3} = 7^2$$

**Proposizione** La potenza di una potenza è la potenza che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Ad esempio si ha:

$$\left(5^3\right)^4 = 5^{12}$$

**Proposizione** Il prodotto di più potenze che hanno lo stesso esponente è la potenza che ha per base il prodotto delle basi e per esponente lo stesso esponente.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Ad esempio si ha:

$$2^3 \cdot 3^3 \cdot 4^3 = (2 \cdot 3 \cdot 4)^3 = 24^3 = 13.824$$

**Proposizione** (Proprietà distributiva dell' elevazione a potenza rispetto al prodotto). La potenza di un prodotto indicato è uguale al prodotto dei singoli fattori con uguale esponente.

$$(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$$

Ad esempio si ha:

$$(2 \cdot 3 \cdot 4)^3 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 4^3 = 8 \cdot 27 \cdot 64 = 13.824$$

**Proposizione** Il quoziente fra due potenze aventi lo stesso esponente è la potenza che ha per base il quoziente fra le basi e per esponente lo stesso esponente.

$$\frac{a^n}{b^n} = (a : b)^n$$

Ad esempio si ha:

$$\frac{12^3}{4^3} = (12 : 4)^3$$

**Proposizione** (Proprietà distributiva dell' elevazione a potenza rispetto alla divisione). La potenza di un quoziente è uguale al quoziente fra le potenze, con uguale esponente, del dividendo e del divisore.

$$(a : b)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ad esempio si ha:

$$(12 : 4)^3 = \frac{12^3}{4^3}$$

**Proposizione** (Cenni sul calcolo rapido). La potenza di un numero che termina con uno o più zeri si può ottenere calcolando la potenza del numero che si ha sopprimendo gli zeri e scrivendo poi, alla sua destra quanti ne indica il prodotto dell' esponente della potenza per il numero degli zeri soppressi.

Ad esempio si ha:

$$1.300^2 = (13 \cdot 100)^2 = 13^2 \cdot 100^2 = 169 \cdot 10^4 = 1.690.000$$

**Proposizione** (Potenze di numeri decimali). La potenza di un numero decimale ha tante cifre decimali quanto è il prodotto del numero delle cifre decimali della base per l' esponente.

Ad esempio si ha:

$$0,28^3 = 0,021952 \qquad (\ 2 \cdot 3 \text{ cifre decimali }\ )$$