Chapter 9

Polinomi. Equazioni.

9.1 Polinomi

9.1.1 Definizioni

Definizione Si chiama *polinomio* un monomio o una somma algebrica di due o più monomi.

Definizione I monomi che compaiono in un polinomio si dicono *termini* del polinomio.

Nella scrittura di un polinomio vengono sottintesi tutti i segni di addizione fra i vari termini.

Esempio Il polinomio i cui termini sono:

$$-\frac{3}{5}x^2y, \quad +\frac{2}{7}xy^2z, \quad -2a^2b^2c^2$$

si scrive:

$$-\frac{3}{5}x^2y + \frac{2}{7}xy^2z - 2a^2b^2c^2$$

A proposito di polinomi, scritti in forma normale e non nulli, si hanno le seguenti definizioni:

Definizione Si chiama *grado* di un polinomio, rispetto ad una lettera, il massimo dei gradi dei suoi termini, rispetto a qulla lettera.

Definizione Si chiama *grado complessivo* di un polinomio il massimo di gradi dei suoi termini.

Definizione Si chiama *termine noto* di un polinomio , il termine che, se esiste, è di grado zero (cioè il termine senza parte letterale).

Definizione Un polinomio si dice omogeneo se tutti i suoi termini sono dello stesso grado.

Esempio Il polinomio

$$2a^3bx + \frac{2}{3}ab^2 + ax^5 + 3$$

- è di terzo grado rispetto alla lettera a
- è di secondo grado rispetto alla lettera b
- è di quinto grado rispetto alla lettera x
- è di sesto grado complessivo
- ha come termine noto $+3$

mentre il polinomio:

$$3x^3y + 7x^2y^2 + 2xy^3$$

è omogeneo di quarto grado.

9.1.2 Polinomi ordinati.

Definizione Un polinomio è **ordinato secondo le potenze decrescenti** di una sua lettera , quando i suoi termini sono ordinati in modo tale che gli esponenti di quella lettera vanno decrescendo dal suo massimo al suo minimo. Significato analogo ha la frase "polinomio ordinato secondo le potenze crescenti di una lettera".

Esempio Il polinomio

$$\frac{7}{2}a^5b^2 + a^4b^3 + 3a^3b - 2a^2 - \frac{2}{3}ab^4 + 5$$

è ordinato secondo le potenze decrescenti della lettera a; se si vuole ordinare lo stesso polinomio secondo le potenze decrescenti della lettera b, si deve scrivere:

$$-\frac{2}{3}ab^4 + a^4b^3 + \frac{7}{2}a^5b^2 + 3a^3b - 2a^2 + 5$$

9.1.3 Divisione di due polinomi in una sola variabile.

Consideriamo due polinomi contenenti una **sola lettera** x (i coefficienti della varie potenze della x siano dati numericamente) ed ordinati secondo le potenze **decrescenti** di tale lettera.

Indichiamo brevemente questi due polinomi, rispettivamente, con le lettere A e B; per mettere in evidenza poi che essi sono funzione della variabile x, indichiamoli rispettivamente con $A(x)$ e $B(x)$ e supponiamo che $B(x)$ non sia il polinomio nullo.

Indichiamo ancora con n il grado di $A(x)$ e con m il grado di $B(x)$ e, come nel caso dei numeri naturali, dove si ammette che il dividendo fosse non minore del divisore, supponiamo che n non sia minore di m.

Premesso ciò si possono presentare due casi:

1° Caso. - Esiste un polinomio, indicato con $Q(x)$ che, moltiplicato per $B(x)$ dà per risultato $A(x)$, cioè:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) .$$

In questo caso si dirà che il polinomio $A(x)$ è divisibile per il polinomio $B(x)$ ed il polinomio $Q(x)$si chiamerà quoziente esatto della divisione di $A(x)$ per $B(x)$.

Si dice anche che $B(x)$ è un **divisore** di $A(x)$, oppure che$A(x)$ è un **multiplo** di $B(x)$.

2° Caso. - Il polinomio $A(x)$ non è divisibile per $B(x)$.

In tal caso è possibile trovare due polinomi, indicati con $Q(x)$ e $R(x)$, in modo che risulti:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x) .$$

con $R(x)$ polinomio di grado **inferiore** al grado di $B(x)$.

9.1.4 Regola pratica per la divisione di polinomi.

Problema Dati due polinomi $A(x)$ e $B(x)$, ordinati secondo le potenze decrescenti della x, come si determina il polinomio quoziente $Q(x)$ e il resto $R(x)$ della divisione di $A(x)$ per $B(x)$?

La **regola pratica** per la divisione dei polinomi verrà illustrata nel seguito con un esempio.

Esempio. Regola pratica. Calcolare il quoziente ed il resto della seguente divisione:

$$\left(4x - 16x^2 + 8x^3 - 1\right) : (4x - 2)$$

La divisione si esegue nel seguente modo:

1) Si **ordinano** i due polinomi secondo le potenze **decrescenti** della lettera x.

Si dispone l' operazione come indicato in figura 9.1.

$$\begin{array}{l|l} 8x^3 - 16x^2 + 4x - 1 & 4x-2 \\ \cline{2-2} & \\ & \end{array}$$

Figure 9.1: Disposizione dell' operazione

2) Si **divide** il primo termine del polinomio dividendo per il primo termine del polinomio divisore, ottendo così il **primo termine del quoziente.**

Si divide cioè $8x^3$ per $4x$ ottenendo così il primo quoziente parziale $2x^2$ come indicato in figura 9.2.

$$\begin{array}{l|l} 8x^3 - 16x^2 + 4x - 1 & 4x-2 \\ \cline{2-2} & 2x^2 \\ & \end{array}$$

Figure 9.2: Primo quoziente parziale

3) Si **moltiplica** il primo termine del quoziente per il polinomio divisore e **si sottrae** dal dividendo il polinomio ottenuto, ottendo così il **primo resto parziale.**

Si moltiplica cioè $2x^2$ per il divisore $(4x - 2)$ e si aggiunge col segno cambiato, il prodotto ottenuto, cioè $8x^3 - 4x^2$, al dividendo, ottenendo così il primo resto parziale come indicato in figura 9.3.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
8x^3 & -16x^2 & +4x & -1 & 4x-2 \\
-8x^3 & +4x^2 & & & \hline \\
\hline
 & -12x^2 & +4x & -1 & 2x^2
\end{array}
$$

Figure 9.3: Primo resto parziale

4) Si **divide** il termine di grado più alto del primo resto parziale per il primo termine del polinomio divisore ottendo così il **secondo termine del quoziente**.

Si divide cioè $-12x^2$ per $4x$ ottendo così $-3x$, che è il secondo termine del quoziente come indicato in figura 9.4.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
8x^3 & -16x^2 & +4x & -1 & 4x-2 \\
-8x^3 & +4x^2 & & & \hline \\
\hline
 & -12x^2 & +4x & -1 & 2x^2 - 3x
\end{array}
$$

Figure 9.4: Secondo termine del quoziente

5) Si **moltiplica** questo secondo termine del quoziente per il polinomio divisore e si continua l' operazione, come si è fatto per il primo termine del quoziente, finchè si ottiene un **resto** parziale **nullo** o di grado minore di quello del divisore.

Si moltiplica cioè $-3x$ per il divisore $(4x - 2)$ e si aggiunge, col segno cambiato, il prodotto ottenuto, cioè $-12x^2 + 6x$, al primo resto parziale, ottenendo il secondo resto parziale come indicato in figura 9.5.

6) Siccome il grado di tale resto è uguale a quello del divisore, si ripete il procedimento ottendo il terzo termine del quoziente, cioè $-\frac{1}{2}$ e il successivo resto, cioè -2, che essendo di grado zero e quindi minore del grado del divisore, è il resto della divisione. Vedi figura 9.6

Dunque risulta:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
8x^3 & -16x^2 & +4x & -1 & 4x-2 \\
-8x^3 & +4x^2 & & & \hline 2x^2-3x \\
\hline
 & -12x^2 & +4x & -1 & \\
 & 12x^2 & -6x & & \\
\hline
 & & -2x & -1 &
\end{array}
$$

Figure 9.5: Secondo resto parziale

$$
\begin{array}{rrrr|l}
8x^3 & -16x^2 & +4x & -1 & 4x-2 \\
-8x^3 & +4x^2 & & & \hline 2x^2-3x-\frac{1}{2} \\
\hline
 & -12x^2 & +4x & -1 & \\
 & 12x^2 & -6x & & \\
\hline
 & & -2x & -1 & \\
 & & 2x & -1 & \\
\hline
 & & & -2 &
\end{array}
$$

Figure 9.6: Terzo termine e resto della divisione

$$Q(x) = 2x^2 - 3x - \frac{1}{2}$$

e il resto è:

$$R(x) = -2$$

Per verificare ora se l' operazione eseguita è esatta, si deve far vedere che è: $B(x) \cdot Q(x) + R(x) = A(x)$; infatti è:

$$B(x) \cdot Q(x) + R(x) = (4x-2)\left(2x^2 - 3x - \frac{1}{2}\right) =$$

$$8x^3 - 12x^2 - 2x - 4x^2 + 6x + 1 - 2 = 8x^3 - 16x^2 + 4x - 1 = A(x)$$

9.1.5 Divisibilità di un polinomio per un binomio di primo grado.

Vale il seguente

Teorema (del Resto). *Il resto della divisione di un polinomio ordinato secondo le potenze decresenti della x, per un binomio del tipo $x - c$, è dato dal valore che assume il polinomio quando al posto della lettera x si sostituisce il numero c, cioè l' opposto del termine noto del divisore.*

Il teorema del resto permette di calcolare direttamente, cioè senza eseguire la divisione, il resto della divisione di un polinomio $A(x)$ per un binomio del tipo $x - c$.

Esempio Determinare il resto della divisione del polinomio:

$$A(x) = 9x^3 - 6x^2 + 5x + \frac{3}{2}$$

per il binomio

$$x + \frac{1}{3}$$

In questo caso il termine noto del divisore è $+\frac{1}{3}$ e quindi il suo opposto è $c = -\frac{1}{3}$, si ha allora:

$$A\left(-\frac{1}{3}\right) = 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 6\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 5\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{5}{3} + \frac{3}{2} = -\frac{7}{6}$$

e quindi il resto della divisione vale $-\frac{7}{6}$ e perciò il polinomio dato non è divisibile esattamente per $x + \frac{1}{3}$.

9.1.6 Teorema di Ruffini.

Vale il seguente

Teorema (di Ruffini). *Un polinomio $A(x)$ è divisibile esattamente per il binomio $x - c$ se il valore che assume $A(x)$ per $x = c$ è zero.*

Per completare l' argomento diamo la seguente

Definizione Ogni valore della variabile$x$ per il quale il polinomio $A(x)$ si annulla si chiama uno **zero** o **radice** del polinomio $A(x)$.

Dal teorema di Ruffini segue che se un polinomio è divisibile per $(x - c)$ allora il numero c è uno zero del polinomio e viceversa.

9.1.7 Regola di Ruffini.

Abbiamo visto come si possa, senza esguire materialmente la divisione, trovare il resto della divisione di un polinomio $A(x)$, ordinato secondo le potenze decrescenti di x, per un binomio del tipo $x - c$.

Vogliamo far vedere ora che esiste anche una regola, detta **Regola di Ruffini**, che ci permette di calcolare il quoziente della suddetta divisione, senza materialmente eseguire la divisione stessa, con il procedimento che già conosciamo.

Esponiamo tale regola con un

Esempio Supponiamo di dovere eseguire la seguente divisione:

$$(5x^3 - 3x^2 - 14x - 20) : (x - 3) .$$

Si ha la divisione riportata in figura 9.7.

$$\begin{array}{rrrr|l}
5x^3 & -3x^2 & -14x & -20 & x-3 \\
-5x^3 & +15x^2 & & & \\ \hline
 & 12x^2 & -14x & -20 & 5x^2+12x+22 \\
 & -12x^2 & +36x & & \\ \hline
 & & 22x & -20 & \\
 & & -22x & +66 & \\ \hline
 & & & +46 &
\end{array}$$

Figure 9.7: Divisione del polinomio assegnato

Tale divisione si può eseguire più facilmente con il **seguente procedimento** che fornisce i coefficienti del quoziente e del resto.

1) Si forma un quadro nel quale i numeri scritti sulla stessa orizzontale sono i coefficienti del dividendo; si tracciano poi due tratti verticali, uno a sinistra del primo coefficiente, e l' altro tra il penultimo e l' ultimo coefficiente; vedi figura 9.8.

2) Si scrive a sinistra del primo tratto verticale il termine noto (-3) del dividendo, *cambiato di segno* (cioè $+3$), e si trascrive sotto la riga orizzontale,

	5	-3	-14	-20

Figure 9.8: Regola di Ruffini: 1) passo

il primo coefficiente, 5, del dividendo: esso è anche il *primo coefficiente del quoziente* (vedi figura 9.9).

	5	-3	-14	-20
3				
	5			

Figure 9.9: Regola di Ruffini: 2) passo.

3) Si moltiplica 5 per 3 e si scrive il prodotto ottenuto, 15, sotto il secondo coefficiente, -3, del dividendo, si esegue la somma -3+15=12, e si scrive il risultato 12 in colonna, sotto la riga orizzontale: tale numero è il secondo coefficiente del quoziente, vedi figura 9.10.

	5	-3	-14	-20
3		15		
	5	12		

Figure 9.10: Regola di Ruffini: 3) passo.

4) Si ripete il procedimento, ottenendo prima il terzo coefficiente del quoziente, cioè 22, e infine il resto, cioè 46 ; confrontare figura 9.11.

	5	-3	-14	-20
3		15	36	66
	5	12	22	46

Figure 9.11: Regola di Ruffini: 4) passo.

Tenendo infine presente che il quoziente è un polinomio di un grado inferiore del dividendo dato, si ha:

$$Q(x) = 5x^2 + 12x + 22 \qquad \text{ed} \qquad R = 46$$

Nella figura 9.11 si vede il risultato della divisione ottenuta con un nuovo metodo; da notare che il risultato coincide con quello ottenuto tramite l' usuale tecnica di divisione di figura 9.7.

Il procedimento che abbiamo illustrato in questo caso particolare, vale in generale e possiamo quindi enunciare la seguente:

Regola di Ruffini Quando si divide il polinomio $A(x)$, ordinato secondo le potenze decrescenti di x, per il binomio $x-c$, allora il quoziente $Q(x)$ ha il primo coefficiente uguale al primo coefficiente del dividendo $A(x)$. Ciascuno dei successivi coefficienti di $Q(x)$, si ottiene moltiplicando per c il coefficiente precedente, del quoziente, ed aggiungendo al prodotto il coefficiente di $A(x)$ che occupa lo stesso posto. Il resto R si ottiene moltiplicando per c l' ultimo coefficiente di $Q(x)$ ed aggiungendo al prodotto l' ultimo coefficiente di $A(x)$.

9.2 Scomposizione di un polinomio in fattori

9.2.1 Premessa.

In aritmetica sappiamo che la scomposizione di un numero naturale in fattori primi è della massima importanza per lo studio successivo delle frazioni.

Così pure, in algebra, è della massima importanza per le sue applicazioni, la scomposizione dei polinomi.

Definizione *Scomporre un polinomio in fattori* significa scriverlo sotto forma di prodotto di due o più polinomi di grado minore.

Premettiamo le seguenti

Definizioni Un polinomio, in una o più variabili, di grado maggiore di zero, si dice *irriducibile* quando non può scomporsi nel prodotto di due polinomi di grado minore. Un polinomio si dice *riducibile* se si può scomporre nel prodotto di due o più polinomi di grado minore.

9.2.2 Scomposizione di polinomi mediante il teorema e la regola di Ruffini.

Il teorema di Ruffini, in molti casi, è della massima utilità, quando si tratta di scomporre un polinomio.

Ragioniamo prima su un esempio.

Esempio Scomporre in fattori il polinomio

$$A(x) = x^4 + 3x^3 - 11x^2 - 3x + 10$$

sapendo che si annulla per $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$.

Siccome $A(x)$ si annulla per $x = 1$, allora il polinomio è divisibile per $x - 1$; esguendo la divisione, con la regola di Ruffini, si trova come quoziente:

$$x^3 + 4x^2 - 7x - 10.$$

Risulta allora:

$$(x^4 + 3x^3 - 11x^2 - 3x + 10) = (x - 1)\left(x^3 + 4x^2 - 7x - 10\right) \tag{9.1}$$

Applicando la stessa regola al polinomio quoziente, che è divisibile per $(x + 1)$ si trova:

$$x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = (x + 1)\left(x^2 + 3x - 10\right) \tag{9.2}$$

Dividendo, infine, il polinomio $x^2 + 3x - 10$ per $(x - 2)$ si ottiene:

$$x^2 + 3x - 10 = (x-2)(x+5) \tag{9.3}$$

In definitiva dalle (9.1),(9.2), (9.3) si vede che il polinomio dato viene scomposto nel modo seguente:

$$x^4 + 3x^3 - 11x^2 - 3x + 10 = (x-1)(x+1)(x-2)(x+5)$$

Da questo esempio si vede quanto sia importante, per la scomposizione di un polinomio in fattori, conoscere gli zeri del polinomio, cioè i numeri che annullano il polinomio.

Lo studio di tale questione non è facile, e quindi ci limiteremo a enunciare una regola pratica che , spesso, permette di trovare alcuni zeri di un dato polinomio e quindi alcuni suoi divisori di primo grado.

Regola pratica 1. Gli eventuali zeri di un polinomio $A(x)$, nel quale il coefficiente della più alta potenza della x è 1, sono divisori interi del termine noto del divisore.

La regola pratica enunciata è un caso particolare della seguente:

Regola pratica 2. In un polinomio, a coefficienti interi, gli eventuali zeri razionbali vanno cercati fra i numeri del tipo $\pm\frac{p}{q}$, ove p è un divisore del termine noto e q è un divisore del coefficiente del termine di grado massimo.

Esempio Gli eventuali zeri razionali del polinomio:

$$2x^3 - x^2 + 2x - 1$$

vanno cercati fra le frazioni del tipo $\pm\frac{p}{q}$, con p divisore di 1 e q divisore di 2, ossia fra le frazioni:

$$\pm 1, \qquad \pm\frac{1}{2}$$

Applicando il teorema di Ruffini si trova lo zero $x = \frac{1}{2}$ e dividendo si ha:

$$A(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(2x^2 + 2\right) = (2x-1)\left(x^2+1\right)$$

Esempio Gli eventuali zeri del polinomio:

$$A(x) = 6x^4 - 7x^3 - 4x^2 - 7x - 2$$

vanno cercati fra le frazioni del tipo $\pm\frac{p}{q}$ con p divisore di 2 e q divisore di 6: ossia le frazioni:

$$\pm 1, \qquad \pm 2, \qquad \pm\frac{1}{2}, \qquad \pm\frac{1}{3}, \qquad \pm\frac{2}{3}, \qquad \pm\frac{1}{6}.$$

Applicandi il teorema di Ruffini si hanno gli zeri:

$$x = -1, \qquad x = 1, \qquad x = \frac{1}{2}, \qquad x = \frac{2}{3}.$$

e dividendo si ha la scomposizione:

$$A(x) = (2x - 1)(3x - 2)(x - 1)(x + 1).$$

9.2.3 Fattorizzazione di un polinomio.

Così come ogni numero intero può essere scomposto in fattori primi, così si può fare con un polinomio. Fattorizzare un polinomio vuol dire riscriverlo come prodotto di polinomi irriducibili. Il primo passo da compiere è quello di individuare i polinomi irriducibili.

Polinomi irriducibili Tutti i binomi di primo grado sono irriducibili. Consideriamo $A_2(x) = ax^2 + bx + c$ trinomio di secondo grado, se $A_2(x)$ ammette due radici reali x_1, x_2 allora il trinomio è divisibile per $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$, cioè :

$$A_2(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Se $A_2(x)$ ammette due radici coincidenti $x_1 = x_2$ si ha:

$$A_2(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

Se $A_2(x)$ non ammette radici reali non è possibile decomporre $A_2(x)$, risulta quindi irriducibile ($ax^2 + bx + c$ è irriducibile quando non possiede radici reali, cioè quando ha il discriminante Δ negativo).

9.2.4 Alcuni metodi di fattorizzazione.

Un **primo metodo** è quello di evidenziare alcuni termini di tipo monomiale presenti in tutti i termini del polinomio e di raccoglierli a fattor comune.

Esempio Il polinomio:

$$A_4(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 = x^2\left(x^2 - 3x + 5\right)$$

ha il secondo termine irriducibile poichè $\Delta < 0$.

A volte si perviene alla fattorizzazione mediante raccoglimenti parziali a fattor comune come nel seguente

Esempio Il polinomio:

$$B_4(x) = x^4 + \left(a^2 + b^2\right)x^2 + a^2b^2 = x^4 + a^2x^2 + b^2x^2a^2b^2 =$$

$$x^2\left(x^2 + a^2\right) + b^2\left(x^2 + a^2\right) = \left(x^2 + a^2\right)\left(x^2 + b^2\right)$$

a questo ci fermiamo perchè entrambi i termini sono irriducibili avendo entrambi $\Delta < 0$.

Si hanno alcune forme utili per la fattorizzazione:

Proposizione Il binomio $x^n - a^n$ è sempre divisibile per $x - a$, se n è pari è divisibile anche per$x + a$. Il binomio $x^n + a^n$ è divisibile per $x + a$ se n è dispari; se n è pari non è divisibile né per $x - a$ né per $x + a$.

Esempi Si osservino le seguenti decomposizioni:

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

$$x^3 - a^3 = (x - a)\left(x^2 + ax + a^2\right)$$

$$x^4 - a^4 = (x - a)(x + a)\left(x^2 + a^2\right)$$

$$x^3 + a^3 = (x + a)\left(x^2 - ax + a^2\right)$$

In generale il metodo di fattorizzazione consiste nella ricerca di una radice c del polinomio e nel calcolo del quoziente del polinomio per $(x - c)$; il polinomio quoziente è di grado inferiore di uno, rispetto a quello di partenza, e ad esso va applicato lo stesso metodo cercando di arrivare con questo procedimento iterativo alla fattorizzazione in fattori di primo o secondo grado a coefficienti reali.

Esempio Si consideri il polinomio

$$A_3(x) = x^3 + 3x^2 - 25x + 21$$

Applicando la Regola pratica1 dobbiamo considerare le eventuali radici intere c : ± 1, ± 3, ± 7 e per ognune di queste si guarda se $A_3(c) = 0$. Si ottiene $A_3(1) = A_3(3) = A_3(7) = 0$ e quindi

$$x^3 + 3x^2 - 25x + 21 = (x - 1)(x - 3)(x - 7)$$

Quindi non è possibile fattorizzare per via Algebrica un polinomio di grado 3 o superiore, poichè non si determinano le sue radici utilizzando le regole pratoche 1 e 2; vi è ancora un metodo grafico analitico mediante lo studio di funzione, che verrà illustrato durante il corso.

Vediamo infine un' applicazione del metodo di fattorizzazione alla risoluzione di disequazioni di grado superiore al secondo.

Esempio Risolvere la disequazione:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x^3 + 8}{3x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 7x + 2} < 0$$

A tal fine si scompone il numeratore come segue:

$$x^3 + 8 = (x + 2)\left(x^2 - 2x + 4\right)$$

quindi si scompone il denominatore applicando la Regola pratica 2, perciò per determinare le eventuali radici razionali, bisogna cercare tra i razionali della forma:

$$\frac{\pm 1}{\pm 1}, \qquad \frac{\pm 1}{\pm 3}, \qquad \frac{\pm 2}{\pm 1}, \qquad \frac{\pm 2}{\pm 3}$$

ovvero:

$$\pm 1, \qquad \pm\frac{1}{3}, \qquad \pm 2, \qquad \pm\frac{2}{3}$$

Si trova che:

$$D\left(\frac{1}{3}\right) = D(2) = 0.$$

Quindi per il denominatore si ottiene:

$$3x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 7x + 2 = (x-2)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(3x^2 + 3\right)$$

La disequazione assegnata si trasforma come segue:

$$\frac{x^3 + 8}{3x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 7x + 2} < 0 \Rightarrow \frac{(x+2)\left(x^2 - 2x + 4\right)}{(x-2)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(3x^2 + 3\right)} < 0$$

Indicando con il tratto unito i valori positivi e con il tratteggio i valori negativi si ha, con il metodo dei segni, la figura 9.12.

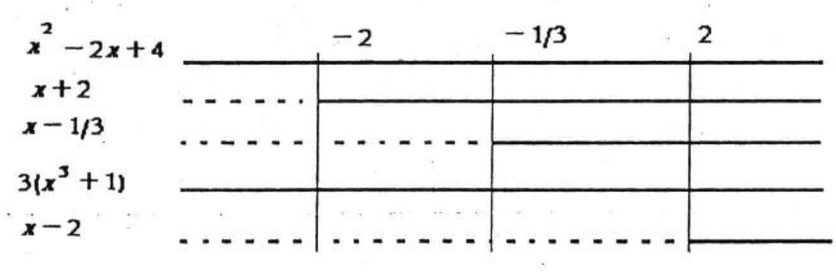

Figure 9.12: Soluzioni di $\frac{N(x)}{D(x)}$

Le soluzioni della disequazione assegnata sono:

$$x < -2, \qquad \text{e} \qquad -\frac{1}{3} < x < 2$$

9.2.5 Esercizi di riepilogo.

Fattorizzare i seguenti polinomi a coefficienti interi:

$x^3 - 6x^2 - 2x + 7,\qquad \left[(x-1)\left(x - \frac{5+\sqrt{53}}{2}\right)\left(x - \frac{5-\sqrt{53}}{2}\right)\right]$

$x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 28x - 21,\qquad \left[(x-1)(x-3)\left(x-\sqrt{7}\right)\left(x+\sqrt{7}\right)\right]$

$x^8 - 17x^4 + 16,\qquad [(x-1)(x+1)(x^2+1)(x-2)(x+2)(x^2+4)]$

$x^6 - a^6,\qquad [(x-a)(x+a)(x^2+ax+a^2)(x^2-ax+a^2)]$

$x^9 + a^9.\qquad [(x+a)(x^2-ax+a^2)(x^6-a^3x^3+a^6)]$

Risolvere le seguenti disequazioni:

$x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x \leq 0,\qquad [-2 \leq x \leq 0]$

$x^4 - 10x^2 + 9 > 0.\qquad [x < -3,\ -1 < x < 1,\ x > 3]$