Compito Parziale di Fisica
09/11/17 - Fila A
Soluzioni

Soluzione dell'esercizio 1

a)
Si impone l'ipotesi che l sia funzione delle altre grandezze fisiche:

$$l = km^{\alpha}t^{\beta}g^{\gamma}$$

dove k è una costante adimensionale.

$$[L^1M^0T^0] = [L^0M^{\alpha}T^0][L^0M^0T^{\beta}][L^{\gamma}M^0T^{-2\gamma}]$$

$$\begin{cases} 1 = 0 + 0 + \gamma \\ 0 = \alpha + 0 + 0 \\ 0 = 0 + \beta - 2\gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

quindi:

$$l = kgt^2$$

b)

$$t = (208 \pm 7)\ \text{ms} \rightarrow (0.208 \pm 0.007)\ \text{s}$$

$$l = (22.45 \pm 0.06)\ \text{cm} \rightarrow l = (0.2245 \pm 0.0006)\ \text{m}$$

c)

$$v = \frac{l}{v} = 1.0806\ \text{m/s}$$

$$\Delta v = v\left(\frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta l}{l}\right) = 0.0406\ \text{m/s}$$

$$v = (1.08 \pm 0.04)\ \text{m/s}$$

Soluzione dell'esercizio 2

a)

Indicando con $\vec{F}_e$ la forza elastica della molla, diretta lungo l'asse x con verso negativo, con $\vec{N}$ la reazione normale del piano e proiettando le forze sugli assi x e y, per la staticità:

$$\begin{cases} x: & F\cos\theta - F_e = 0 \\ y: & N + F\sin\theta - mg = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione (il modulo di $F_e = k\Delta x$):

$$F\cos\theta = k\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{F\cos\theta}{k} = 0.127 \text{ m}$$

In alternativa, si può scrivere anche l'equazione della statica lungo l'asse x:

$$F\cos\theta + F_e = 0$$

dove:

$$F_e = -k\Delta x$$

con Δx una quantità positiva, poiché l'allungamento avviene nel verso positivo dell'asse x. Precedentemente abbiamo scritto i moduli attribuendogli un segno in relazione alle proiezioni sull'asse date dal diagramma di corpo libero. Le due strade portano allo stesso risultato.

b)

La forza peso e la forza normale compiono un lavoro nullo, in quanto perpendicolari allo spostamento. Per quanto riguarda il lavoro della forza $\vec{F}$:

$$L_F = \vec{F}\cdot\vec{d} = Fd\cos\theta = 58.5 \text{ J}$$

c)

Per trovare la velocità della massa m_1 un istante prima dell'urto, possiamo usare due metodi:

Metodo 1:

L'accelerazione del corpo lungo l'asse x avrà modulo:

$$a = \frac{F\cos\theta}{m_1}$$

Per le leggi del moto uniformemente accelerato:

$$v_1^2 = v_{01}^2 + 2ad$$

dato che la velocità iniziale v_{01} è nulla, perché il corpo parte da fermo, e sostituendo a:

$$v_1 = \sqrt{2d\frac{F\cos\theta}{m_1}} = 3.42 \text{ m/s}$$

Metodo 2:
Si sfrutta il Teorema delle Forze Vive:

$$\Delta K = L$$

dato che il corpo parte da fermo:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = F d \cos\theta$$

dalla quale, ricavando v_1 si ottiene lo stesso risultato.

A questo punto possiamo considerare che nell'urto perfettamente anelastico la quantità di moto prima e dopo l'urto si conserva e che i due corpi rimangono attaccati:

$$Q_i = Q_f$$

$$q_{1i} + q_{2i} = (m_1 + m_2)V$$

dove V è il modulo della velocità incognita, diretta lungo l'asse x. Sfruttando che il corpo m_2 è fermo nell'istante prima dell'urto e che v_1 è la velocità del corpo m_1 nell'istante prima dell'urto:

$$m_1 v_1 = V$$

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = 2.19 \text{ m/s}$$

Soluzione dell'esercizio 3

a)
Proiettando sugli assi x e y le forze applicate su m_1:

$$\begin{cases} x: & T\sin\theta - F = 0 \\ y: & T\cos\theta - mg = 0 \end{cases}$$

Dove $\vec{T}$ è la tensione della corda. Si ricava T dalla seconda equazione e si sostituisce nella prima, ottenendo:

$$F = mg\tan\theta = 34.0 \text{ N}$$

b)
Per prima cosa bisogna trovare il modulo della velocità v_{1i} con cui la massa m_1 arriva a collidere con l'altra massa, cioè il punto in cui la corda risulta verticale. Dato che ora la forza che compie lavoro è solo la forza peso (la tensione della corda è punto per punto perpendicolare allo spostamento della massa, quindi compie lavoro nullo), utilizziamo la conservazione dell'energia meccanica tra l'istante in cui il gancio viene sganciato e l'arrivo al punto di impatto. Scegliamo questo punto come riferimento per il calcolo dell'energia potenziale gravitazionale

(cioè la poniamo nulla in quel punto). Nell'istante iniziale la massa è ferma e tutta l'energia è energia potenziale gravitazionale. Nell'istante finale tutta l'energia è diventata energia cinetica.

$$E_i = E_f$$

$$mg\Delta y = \frac{1}{2}mv_{1i}^2$$

dove Δy è la variazione di quota sperimentata dalla massa. Questa distanza si può trovare sfruttando la lunghezza della corda e l'angolo iniziale:

$$\Delta y = l(1 - \cos\theta)$$

Sostituendo nell'equazione precedente e trovando v_{1i}:

$$v_{1i} = \sqrt{2gl(1 - \cos\theta)} = 3.13 \text{ m/s}$$

c)
Questa velocità sarà diretta orizzontalmente e verso destra. La velocità iniziale della massa m_2 è nulla. Quindi l'equazione per l'urto elastico per la massa m_2 si riduce a:

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1i}$$

Questa velocità avrà la stessa direzione e verso di $\vec{v}_{1i}$, quindi non ha componente verticale. Il tempo t di caduta si trova attraverso:

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Lungo la direzione orizzontale il moto è rettilineo uniforme:

$$d = v_{2f}t = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1i}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 3.27 \text{ m}$$

Soluzione dell'esercizio 4

a)
Le tre masse formano un triangolo isoscele e quindi abbiamo i dati per ricavare le coordinate delle masse:

$$m_1: \qquad \vec{r_1} = (x_1, y_1) = (-d\cos\frac{\pi}{6}, 0)$$
$$m_2: \qquad \vec{r_2} = (x_2, y_2) = (d\cos\frac{\pi}{6}, 0)$$
$$m_3: \qquad \vec{r_3} = (x_3, y_3) = (0, d\sin\frac{\pi}{6})$$

Indicando con $M = m_1 + m_2 + m_3 = 6$ kg e chiamando per semplicità $m_1 = m_2 = m$:

$$x_{cm} = \frac{1}{M}(x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3) = \frac{1}{M}\left(-d\cos\frac{\pi}{6}m + d\cos\frac{\pi}{6}m + 0m_3\right) = 0.00 \text{ m}$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}(y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3) = \frac{1}{M}\left(0m + 0m + d\sin\frac{\pi}{6}m_3\right) = d\sin\frac{\pi}{6}\frac{m_3}{M} = 0.333 \text{ m}$$

b)

Si osserva che le componenti lungo l'asse x delle 2 forze gravitazionali applicate su m_3 si elidono a vicenda. Quindi per trovare il modulo dalla forza risultante basta sommare le componenti lungo y. Ognuna di queste ha modulo:

$$F_y = G\frac{m_3 m}{d^2}\sin\theta$$

Quindi la risultante $\vec{F}$ si disegna sul grafico applicata su m_3 con direzione lungo l'asse e puntante verso il basso. Il suo modulo è:

$$F = 2G\frac{m_3 m}{l^2}\sin\theta = 2.67 \cdot 10^{-10} \text{ N}$$

c)

Per quanto riguarda la dinamica del centro di massa conta solo la risultante delle forze esterne:

$$M\vec{a}_{cm} = \vec{F}_E = F_E\hat{i}$$

Il moto del centro di massa si svolge quindi in direzione parallela all'asse x. In un intervallo di tempo t lungo x il CM percorre uno spostamento Δx:

$$\Delta x = \frac{1}{2}\frac{F_E}{M}\Delta t^2 = 2.08 \cdot 10^5 \text{ m}$$

Soluzione dell'esercizio 5

Si deriva rispetto al tempo per trovare l'espressione della velocità istantanea.

$$v(t) = \omega l\cos(\omega t - \frac{\pi}{4})$$

Al tempo $t = 0$:

$$x(0) = x_0 + l\sin(-\frac{\pi}{4}) = x_0 - \frac{l}{\sqrt{2}} = 1.29 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$v(0) = \omega l\cos(-\frac{\pi}{4}) = \omega\frac{l}{\sqrt{2}} = 2.12 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$$

Per trovare cosa succede nell'istante t_1, la via più breve è ricordarsi che:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Sostituendo questa espressione e $t_1 = T/8$ e semplificando:

$$x(t_1) = x_0 + l\sin(\frac{2\pi}{\cancel{T}}\frac{\cancel{T}}{8} - \frac{\pi}{4}) = x_0 + l\sin(0) = x_0 = 2.00 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$v(t_1) = \omega l\cos(\frac{2\pi}{\cancel{T}}\frac{\cancel{T}}{8} - \frac{\pi}{4}) = \omega l\cos(0) = \omega l = 3.00 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$$