

Compito Parziale di Fisica

09/11/17 - Fila B

Soluzioni

Soluzione dell'esercizio 1

a)

$$[\sigma] = [L^\alpha M^\beta T^\gamma]$$

Si impone l'ipotesi che la condizione che l'argomento dell'esponentiale debba essere adimensionale e quindi si trova $[\sigma]$:

$$[L^0 M^0 T^0] = [c][\sigma][z]$$

$$[L^0 M^0 T^0] = [L^{-3} M^0 T^0][L^\alpha M^\beta T^\gamma][L^1 M^0 T^0]$$

Si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} 0 = -3 + \alpha + 1 \\ 0 = 0 + \beta + 0 \\ 0 = 0 + \gamma + 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

quindi:

$$[\sigma] = [L^2 M^0 T^0]$$

Le dimensioni sono quelle di una superficie (σ si chiama infatti *sezione d'urto*). In SI, si misura in m^2 . b)

$$m = (0.102 \pm 0.003) \text{ kg}$$

$$v = (8.02 \pm 0.04) \text{ m/s}$$

c)

$$q = mv = 0.8195 \text{ kg m/s}$$

$$\Delta q = q \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta v}{v} \right) = 0.0256 \text{ kg m/s}$$

$$q = (0.82 \pm 0.03) \text{ kg m/s}$$

Soluzione dell'esercizio 2

a)

Fino al punto B , si sfrutta la conservazione dell'energia meccanica per determinare la velocità di modulo v_B . In A , dato che la massa è inizialmente ferma, tutta l'energia meccanica è energia potenziale gravitazionale. Avendo scelto la quota di B come riferimento per calcolare l'energia potenziale ($U_B = 0$), in B l'energia meccanica è tutta energia cinetica:

$$E = mgh = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

Per trovare la velocità in C , si può procedere in 2 modi:

METODO 1

Attraverso il moto uniformemente accelerato:

La forza di attrito \vec{F}_a , diretta opposta alla velocità, ha modulo:

$$F_a = \mu_d N = \mu_d m_1 g$$

L'accelerazione è quindi:

$$a = -\mu_d g$$

La velocità in C sarà quindi:

$$v_C^2 = v_B^2 - 2\mu_d g d_1$$

Sostituendo v_B trovato prima e facendo la radice quadrata:

$$v_C = \sqrt{2gh - 2\mu_d g d_1} = 5.86 \text{ m/s}$$

METODO 2:

La variazione di energia cinetica sarà uguale al lavoro della forza di attrito:

$$\Delta K = L_a$$

$$\frac{1}{2}m_1v_C^2 - \frac{1}{2}m_1v_B^2 = \mu_d m_1 g d_1$$

che porta allo stesso risultato. b)

Prendiamo come positive le velocità che vanno da sinistra verso destra. Chiamando con v_{1f} e v_{2f} le velocità delle masse dopo l'urto, dalle formule dell'urto elastico si trova:

$$v_{1f} = 3.52 \text{ m/s}$$

$$v_{2f} = 9.37 \text{ m/s}$$

Le due velocità sono dirette nella stessa direzione e dirette verso D . Quindi entrambe lo raggiungono senza dover ripassare due volte da C . Il moto fino a D è rettilineo uniforme:

$$t_1 = d_2/v_{1f}$$

$$t_2 = d_2/v_{2f}$$

La massa m_1 arriverà in D con un ritardo $\Delta t = t_1 - t_2$:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = d_2 \left(\frac{1}{v_{1f}} - \frac{1}{v_{2f}} \right) = 0.356 \text{ s}$$

d)

La quota massima si raggiungerà quando si annullerà la componente verticale della velocità, quindi v_y . Utilizzando la formula del moto uniformemente accelerato:

$$v_f^2 = v_0^2 - 2gh_m$$

$$0 = v_y^2 - 2gh_m$$

$$h_m = \frac{v_y^2}{2g} = 1.27 \text{ m}$$

Per il tempo di volo si sfrutta sempre il fatto che nel vertice della traiettoria la componente lungo y della velocità diventa 0:

$$0 = v_y - gt_m$$

$$t_m = \frac{v_y}{g}$$

Il tempo di volo è due volte questo tempo:

$$t_v = 2 \frac{v_y}{g}$$

Lungo l'asse x il moto è rettilineo uniforme con velocità v_{2f} :

$$R = v_{2f} t_v = v_{2f} 2 \frac{v_y}{g} = 9.56 \text{ m}$$

Vedere la nota ^[1] per il metodo alternativo.

Soluzione dell'esercizio 3

a)

Per il corpo 1 disegnano un asse x parallelo al piano inclinato, puntante verso il basso e un asse y normale al piano e puntante verso l'alto. Proiettando le forze sugli assi:

$$\begin{cases} x: & m_1 g \sin \theta - T = 0 \\ y: & N - m_1 g \cos \theta = 0 \end{cases}$$

Per il corpo 2 basta un asse y puntante verso l'alto. Avremo:

$$T - m_2 g - F = 0$$

da cui:

$$T = m_2 g + F$$

La tensione T è la stessa sulla corda ideale. Si sostituisce nell'equazione per il primo corpo sull'asse x :

$$m_1 g \sin \theta - m_2 g - F = 0$$

Quindi:

$$F = m_1 g \sin \theta - m_2 g = 7.37 \cdot 10^3 \text{ N}$$

^[1]Se si vuole in alternativa usare le formule classiche per h_m e R (scelta non consigliata in questo caso perchè aumenta i conti da fare), prima bisognerebbe trovare il modulo v_0 della velocità iniziale sapendo che:

$$\vec{v}_0 = v_{2f} \hat{i} + v_y \hat{j}$$

quindi:

$$v_0 = \sqrt{v_{2f}^2 + v_y^2}$$

L'angolo θ di lancio si trova guardando il triangolo che formano \vec{v}_0 , v_{2f} e \vec{v}_y :

$$v_y = v_{2f} \tan \theta$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{v_y}{v_{2f}} \right)$$

da cui seguono le formule per h_m e R .

b)

Il fatto che lo spostamento avvenga a velocità costante vuol dire che la variazione di energia cinetica è nulla. Per il teorema delle forze vive:

$$\Delta K = L_s + L_1 + L_2 = 0$$

Quindi:

$$L_s = -L_1 - L_2$$

dove L_1 e L_2 sono rispettivamente i lavori della forza gravitazionale durante lo spostamento della massa m_1 e della massa m_2 . La massa m_1 sale di un tratto d lungo il piano inclinato. Essendo la forza peso una forza conservativa, il suo lavoro dipende solo dal punto di inizio e dal punto di arrivo (in particolare, la quota di inizio e la quota di arrivo). Il lavoro della forza peso è:

$$L_1 = -\Delta U_1$$

Ponendo come riferimento per il calcolo dell'energia potenziale il punto B di partenza, la variazione è:

$$\Delta U_1 = m_1gh = m_1gd \sin \theta$$

quindi:

$$L_1 = -m_1gd \sin \theta$$

Essendo il filo inestensibile, nello stesso tempo la massa m_2 scende di una quota uguale a d , quindi la sua variazione di energia potenziale ΔU_2 è:

$$\Delta U_2 = -m_2gd$$

quindi:

$$L_2 = -\Delta U_2 = m_2gd$$

Sostituendo nell'espressione per L_s :

$$L_s = -L_1 - L_2 = m_1gd \sin \theta - m_2gd = 3.31 \cdot 10^4 \text{ J}$$

c)

La potenza media del motore è:

$$\bar{\mathcal{P}} = \frac{L_s}{\Delta t} = 6.63 \text{ kW}$$

Soluzione dell'esercizio 4

a)

La forza gravitazionale è uguale alla forza centripeta che permette il moto circolare uniforme:

$$G \frac{M m_p}{r^2} = m_p \omega^2 r$$

sapendo che il periodo $T = 2\pi/\omega$:

$$G \frac{M m_p}{r^2} = m \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

da cui si ricava la Legge di Periodi (Terza Legge di Keplero per quel sistema planetario):

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} = 7.71 \cdot 10^8 \text{ s} = 24.5 \text{ yr}$$

b)

Il valore del campo gravitazionale è:

$$g_p = G \frac{m_p}{R_p^2} = 10.2 \text{ m/s}^2$$

E' più intenso quindi di quello che sperimentiamo sulla superficie della Terra:

$$g_p/g = 1.04$$

quindi:

$$g_p = 1.04g$$

c)

L'energia meccanica della sonda di massa qualsiasi m si conserva perché a compiere lavoro è solo la forza gravitazionale, che è conservativa. Per definizione di velocità di fuga, la sua energia cinetica all'infinito è nulla, così come la sua energia potenziale. Quindi si impone che, avendo una velocità iniziale v_f sulla superficie del pianeta, la sua energia meccanica sia zero:

$$E = \frac{1}{2} m v_f^2 - G \frac{m_p m}{R_p} = 0$$

da cui si trova:

$$v_f = \sqrt{\frac{2Gm_p}{R_p}} = 1.25 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

Soluzione dell'esercizio 5

a)

Per trovare il punto di equilibrio:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} k (x - x_0)^2 \right) = k(x - x_0)$$

La soluzione è x_0 .

Per valutare se è stabile, troviamo la forza:

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -k(x - x_0)$$

Facendo la sua derivata:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -k$$

Essendo k una costante positiva, la derivata di F è sempre negativa e quindi F decrescente. Il punto è di equilibrio stabile, come da attesa.