# Compito di Fisica
# 15/06/18
# Soluzioni

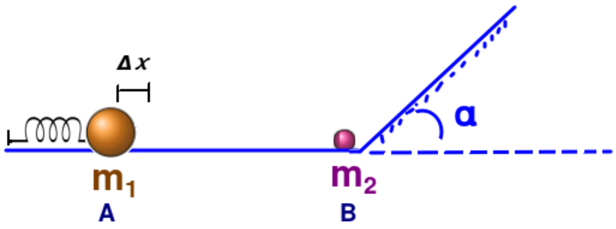


**Figura 1**

**Soluzione dell'esercizio 1**

a)
Dato che la forza elastica è conservativa e nel piano non c'è attrito, si impone la conservazione dell'energia meccanica tra l'istante iniziale e quello immediatamente prima dell'urto:

$$\frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{k\Delta x^2}{m_1}} = 5.00 \text{ m/s}$$

b)
Si applica la conservazione della quantità di moto complessiva del sistema fatto dalle due masse, prima e dopo l'urto:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)V$$

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = 3.33 \text{ m/s}$$

c)
Indicando con $m = (m_1 + m_2)$ la massa del nuovo corpo, questo punto del problema si può fare

in due modi:
MODO I) Con il teorema delle forze vive

$$\Delta K = L$$

dove $K$ è l'energia cinetica e $L$ è il lavoro complessivo delle forze che agiscono sul piano inclinato, cioè la forza peso $\vec{F}_g$, la forza di attrito $\vec{F}_a$ e la forza normale $\vec{N}$. Indicando con $\vec{d}$ lo spostamento massimo effettuato dal corpo lungo il piano inclinato:

$$L = \underbrace{\vec{F}_g \cdot \vec{d}}_{L_g} + \underbrace{\vec{F}_a \cdot \vec{d}}_{L_a} + \underbrace{\vec{N} \cdot \vec{d}}_{L_N}$$

$L_N$ è nullo perchè $\vec{N}$ è perpendicolare allo spostamento.

$$L_g = -mgd \sin \alpha$$

Dal diagramma di corpo libero:

$$\vec{F}_a = \mu_d |\vec{N}|(-\hat{v}) = \mu_d mg \cos \alpha (-\hat{v})$$

dove $\hat{v}$ è il versore che indica direzione e verso della velocità lungo il piano inclinato.

$$L_a = -\mu_d mgd \cos \alpha$$

La variazione di energia cinetica, dato che il corpo alla fine si ferma:

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2} m V^2$$

Applicando il teorema delle forze vive, abbiamo quindi:

$$-\frac{1}{2} m V^2 = -mgd \sin \alpha - \mu_d mgd \cos \alpha$$

Dato che l'altezza $h = d \sin \alpha$, si sostituisce $d$ nella formula precedente e alla fine si trova:

$$h = \frac{V^2}{2g(1 + \mu_d \cot \alpha)} = 0.227 \text{ m}$$

MODO II) Studiando la dinamica:
Dal diagramma di corpo libero si trova che l'accelerazione $a_x$ lungo l'asse $x$ parallelo al piano inclinato è:

$$a_x = -mg(\sin \alpha + \mu_d \cos \alpha)$$

Dalla cinematica del moto uniformemente accelerato si trova:

$$V_f^2 = V_0^2 + 2ad$$

sostituendo la velocità finale, quella iniziale e l'accelerazione:

$$0 = V^2 - 2a_x d$$

da cui si può ricavare la stessa espressione finale del MODO I).
c)
Perché il corpo scenda lungo il piano iclinato una volta fermato, la componente della forza peso lungo il piano inclinato deve essere maggiore della forza di attrito statico. Traducendo ciò in una equazione, il corpo si muoverà se la seguente disequazione è soddisfatta:

$$F_{gx} > F_{as}$$

$$mg \sin\alpha > \mu_s mg \cos\alpha$$

Semplificando:

$$\tan\alpha > \mu_s$$

Essendo $\tan\alpha = 0.268$, la disequazione non è soddisfatta e quindi il corpo rimane fermo.

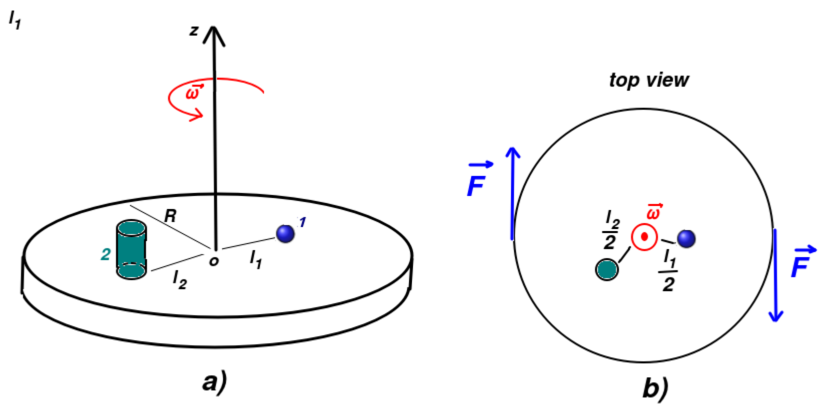


**Figura 2**

## Soluzione dell'esercizio 2

a)
Il momento d'inerzia complessivo $I_i$ sarà:

$$I_i = I_{gio} + I_c + I_s$$

dove $I_{gio}$, $I_c$ e $I_s$ sono rispettivamente il momento d'inerzia rispetto all'asse $z$ della giostra, del cilindro e della sfera.

$$I_{gio} = \frac{1}{2}MR^2$$

Si calcolano le masse della sfera e del cilindro:

$$m_s = \rho_{Pb}\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$m_c = \rho_{Pb} h \pi r^2$$

Per calcolare il momento d'inerzia della sfera e del cilindro serve il Teorema di Huygens-Steiner, dato che l'asse $z$ non passa per il centro di massa dei due corpi:

$$I_s = \frac{2}{5} m_s r^2 + m_s l_1^2$$

$$I_c = \frac{1}{2} m_c r^2 + m_c l_2^2$$

Sostituendo:

$$I_i = 32.6 \text{kgm}^2$$

b)
Si ricacola il momento d'inerzia sostituendo a $l_1$ e a $l_2$ la loro metà:

$$I_f = 26.9 \text{kgm}^2$$

c)
Dato che non ci sono forze esterne, e quindi momenti torcenti di forze esterne, il momento angolare totale di conserva. Dato che il momento angolare $\vec{L} = I\vec{\omega}$ è diretto lungo l'asse $z$, si può proiettare su questo asse:

$$L_{zi} = L_{zf}$$

$$I_i \omega = I_f \omega_f$$

$$\omega_f = \frac{I_i}{I_f} \omega = 3.64 \text{ rad/s}$$

d)
Il modulo $\tau$ del momento torcente è:

$$\tau = 2RF$$

Dalla regola della mano destra si trova che $\vec{\tau}$ è diretto secondo l'asse $z$ negativo ($\vec{\tau} = -\tau\hat{k}$), mentre si sa dal disegno che $\omega_f$ ($\vec{\omega_f} = \omega_f \hat{k}$) è diretta secondo l'asse $z$ positivo. L'accelerazione angolare è:

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\tau}}{I_f} = -\frac{\tau}{I_f}\hat{k}$$

Quindi, proiettando il problema lungo l'asse $z$, si trova una accelerazione angolare $\alpha$ negativa. Dalla cinematica del moto rotatorio:

$$\omega_{f2} = \omega_f - \frac{\tau}{I_f} t' = 0.665 \text{ rad/s}$$

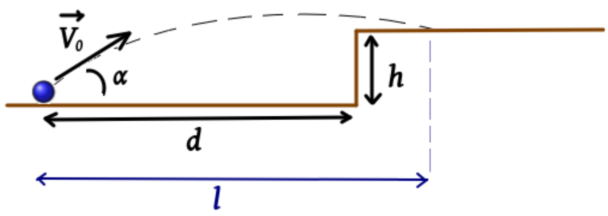


**Figura 3**

**Soluzione dell'esercizio 3**

a)
In un istante generico $t$ durante il moto parabolico, la quota del corpo rispetto alla quota di partenza ($y_0 = 0$) è:

$$y(t) = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Imponendo che la quota sia la quota dello scalino:

$$h = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Si ottiene quindi una equazione di secondo grado con incognita $t$. Si trovano due soluzioni:

$$t_+ = 0.746\text{s}$$
$$t_- = 0.273\text{s}$$

Infatti, come si vede dal disegno, duarante il moto il corpo raggiunge tale quota in due istanti, uno in ascesa e uno in discesa. Intanto, la distanza orizzontale del corpo, rispetto all'origine $x_0 = 0$, è descritta da un moto rettilineo uniforme:

$$x(t) = v_0 \cos\alpha t$$

Sostituendo i tempi trovati in questa equazione:

$$x(t_+) = 6.46 \text{ m}$$
$$x(t_-) = 1.37 \text{ m}$$

I dati del problema indicano che lo scalino viene raggiunto dal corpo e ha una distanza di 4.00 m dall'origine, quindi la seconda soluzione va scartata. Il corpo raggiungerà lo scalino in fase di discesa, dopo aver coperto una distanza orizzontale dall'origine:

$$d = 6.46 \text{ m}$$

b)
Si può imporre la conservazione dell'energia meccanica, studiando il moto lungo l'asse $y$. Il lavoro della forza peso è per definizione:

$$L_g = -\Delta U_g = -mgH$$

dove $U_g$ è l'energia potenziale gravitazionale, posta uguale a 0 alla quota 0. Applicando il teorema delle forze vive:

$$\Delta K = L_g$$

$$K_f - K_i = -mgH$$

dato che nel punto di quota massima la componente della velocità istantanea lungo l'asse $y$ è nulla:

$$0 - \frac{1}{2}m(v_0 \sin\alpha)^2 = -mgH$$

Si trova:

$$H = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g} = 1.27 \text{ m}$$

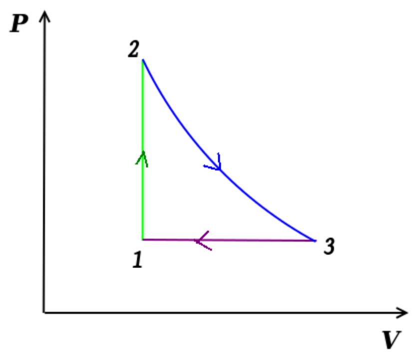


**Figura 4**

**Soluzione dell'esercizio 4**

Prima di tutto, il gas è composto da tre atomi, quindi dalla tabella:

$$C_v = 3R$$
$$C_p = 4R$$
$$\gamma = \frac{4}{3}$$

Ricordiamoci poi di convertire $P_1$ in Pa:

$$P_1 = 1.50 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Sfruttando l'isobara e l'isocora si deduce anche che:

$$V_1 = V_2$$
$$P_1 = P_3$$

a)
Si sfrutta il fatto che lungo una trasformazione adiabatica la quantità $PV^\gamma$ resta costante:

$$P_2 V_2^\gamma = P_3 V_3^\gamma$$

$$P_2 = P_3 \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^\gamma = P_1 \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^\gamma = 3.78 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Dall'equazione dei gas perfetti applicata in ogni punto:

$$PV = nRT$$

si trova:

$$T_1 = 181°\text{K}$$
$$T_2 = 455°\text{K}$$
$$T_1 = 361°\text{K}$$

b)
$Q_{23}$ è naturalmente nulla.

$$Q_{12} = nC_v(T_2 - T_1) = 13.7 \text{ kJ}$$

$$Q_{31} = nC_p(T_1 - T_3) = -12.0 \text{ kJ}$$

c)
$Q_{12}$ rappresenta il calore assorbito, perché positivo, mentre $Q_{31}$ quello ceduto:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{31}|}{Q_{12}} = 0.123 = 12.3\%$$

$$\eta_c = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 0.603 = 60.3\%$$

**Soluzione dell'esercizio 5**

Con riferimento alla figura 5, troviamo l'angolo $\alpha = \arctan\left(\frac{h}{l}\right) = 0.464$.
In generale, l'espressione del campo elettrico generato da una carica puntiforme in un punto $P$ è:

$$\vec{E}(P) = k\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

e il suo modulo:

$$E(P) = |E(P)| = \left|k\frac{q}{r^2}\right|$$

dove $k$ è la costante di Coulomb, $\vec{r}$ è il vettore che punta dalla carica a $P$, $r$ il suo modulo e $\hat{r}$ il suo versore. Nel caso di $q_1$, troviamo la distanza $r_1$:

$$r_1 = \sqrt{l^2 + h^2}$$

$$E_1(P) = \left| k\frac{q_1}{r_1^2} \right| = 0.180 \text{ N/C}$$

$\vec{E}$ ha stesso direzione e verso di $\hat{r}$, essendo la carica positiva. Troviamo le componenti:

$$E_{1x} = E_1 \cos\alpha = 0.161 \text{ N/C}$$
$$E_{1y} = E_1 \sin\alpha = 0.0804 \text{ N/C}$$

$$\vec{E_1}(P) = 0.161 \text{ N/C}\hat{\imath} + 0.0804 \text{ N/C}\hat{\jmath}$$

b)

$$E_2(P) = \left| k\frac{q_1}{h^2} \right| = 0.899 \text{ N/C}$$

Dato che $r_2 = h$. Il verso di $\vec{E_2}(P)$ è opposto a quello di $\hat{r_2}$, poiché la carica è negativa.

$$E_{2x} = 0$$
$$E_{2y} = -0.899 \text{ N/C}$$

$$\vec{E_2}(P) = -0.899 \text{ N/C}\hat{\jmath}$$

La costruzione grafica della risultante $\vec{E}$ si fa con la regola del parallelogramma (vedere figura 5). Le componenti di $\vec{E}$:

$$E_x = E_{1x} + E_{2x}$$
$$E_xy = E_{1y} + E_{2y}$$

$$\vec{E} = 0.161 \text{ N/C}\hat{\imath} - 0.738 \text{ N/C}\hat{\jmath}$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 0.755 \text{ N/C}$$

c)
Ricordiamoci di convertire la massa in kg: $m = 1.00 \cdot 10^{-9}$ kg.
Troviamo la forza di Coulomb:

$$\vec{F_e} = q_3\vec{E}$$

E applichiamo la prima legge di Newton:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_e}{m} = \frac{q_3\vec{E}}{m}$$

Essendo la carica positiva la direzione e verso di $\vec{a}$ è la stessa di $\vec{E}$.

$$a = \left|\frac{q_3 E}{m}\right| = 0.755\ \mathrm{m/s^2}$$

$$\vec{a} = \frac{q_3}{m}(E_x\hat{\imath} + E_y\hat{\jmath}) = 0.0161\ \mathrm{m/s^2}\hat{\imath} - 0.0738\ \mathrm{m/s^2}\hat{\jmath}$$

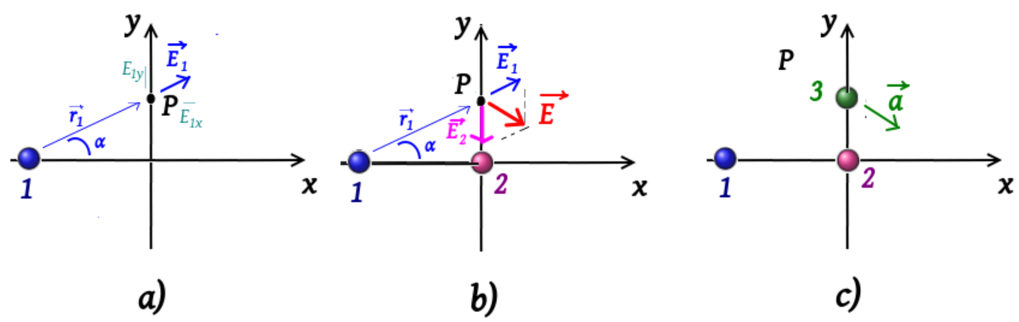


**Figura 5**