Soluzione Compito di Fisica
09/02/18 - Fila B

Soluzione dell'esercizio 1

a)
La velocità minima permette di raggiungere le mura con una quota uguale a 0. Quindi la distanza L va a coincidere con la definizione di gittata, che si trova trovando il tempo di volo t_v e sostituendolo all'equazione del moto rettilineo uniforme lungo la direzione parallela al suolo (vedere dispense - Cap. 2).

$$L = \frac{v^2}{g} \sin 2\theta$$

$$v = \sqrt{\frac{Rg}{\sin 2\theta}} = 44.6 \text{ m/s}$$

b)
Dalla formula del moto uniformemente accelerato:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2as$$

sapendo che nel vertice della traiettoria la velocità è nulla, $a = -g$ e $s = h_m$, si trova:

$$h_m = \frac{v^2(\sin\theta)^2}{2g} = 59.6 \text{ m}$$

c)
Prima di tutto scegliamo un sistema di riferimento in modo che la posizione della catapulta sia in $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$. Quindi le mura del castello saranno nella coordinata $x = L - L_2$ che rinominiamo per semplicità come l. Possiamo fare ora in due modi che portano allo stesso risultato.
1) Seguendo il procedimento del Cap. 2 delle dispense, si ricava l'equazione della traiettoria parabolica (per la quale abbiamo che $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$). Il punto di coordinate (l, H) è un punto di questa traiettoria, quindi si trova:

$$H = l\tan\theta - \frac{1}{2}g\frac{l^2}{v^2\cos^2\theta} = 11.3 \text{ m}$$

2) L'altro modo è quello di ragionare sul moto. Mentre il proiettile è in volo, lungo l'asse x si muove in moto rettilineo uniforme. Quindi il proiettile raggiungerà le mura una volta che ha coperto una distanza pari a l lungo l'asse x. Si trova quindi il tempo t_l necessario:

$$t_l = \frac{l}{v\cos\theta}$$

Lungo l'asse y il moto è uniformemente accelerato con equazione:

$$y = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

dove $v_0 = v\sin\theta$, $a = -g$. Ponendo il tempo $t = t_l$ e sostituendo si trova:

$$H = v\sin\theta\frac{l}{v\cos\theta} - \frac{1}{2}g\left(\frac{l}{v\cos\theta}\right)^2$$

che quindi porta alla stessa espressione per H:

$$H = l\tan\theta - \frac{1}{2}g\frac{l^2}{v^2\cos^2\theta} = 11.3 \text{ m}$$

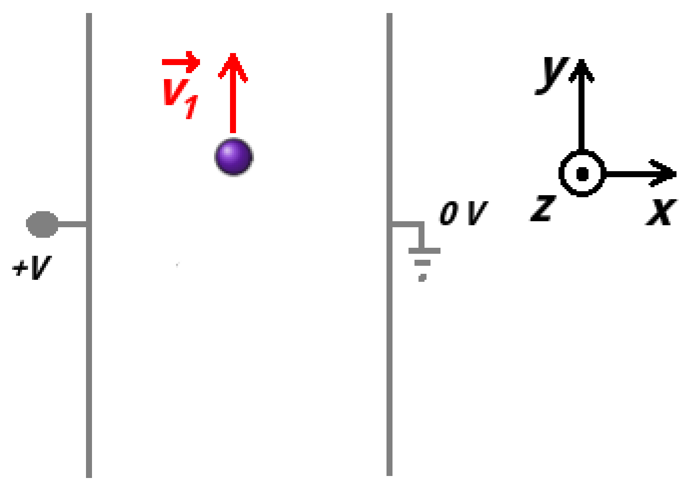

Figura 1

Soluzione dell'esercizio 2

a)

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\hat{\imath}$$

La soluzione del problema è immediata seguendo la sezione X.1.5 delle dispense; comunque di seguito verrà dimostrata matematicamente. Il potenziale aumenta linearmente lungo la direzione negativa dell'asse x, quindi con equazione:

$$V(x) = V_0 - mx$$

Mettendo l'origine dell'asse x in corrispondenza dell'armatura a destra:

$$V(0) = V_0 - m0 = 0 \text{ V}$$

Quindi $V_0 = 0$ V. Muovendoci a distanza $-d$ ($+V = \Delta V - V_0 = \Delta V$):

$$V(-d) = 0 \text{ V} + m(-d) = \Delta V$$

trovando che:

$$m = -\frac{\Delta V}{d}$$

Quindi, l'andamento del potenziale (muovendoci lungo l'asse x in verso negativo a partire dall'armatura a destra verso quella a sinistra) è:

$$V(x) = -\frac{\Delta V}{d}x$$

Quindi troviamo l'andamento del modulo della componente del campo elettrico muovendoci lungo la coordinata x nella regione di spazio individuata tra le due armature:

$$E(x) = -\frac{d}{dx}\left(-\frac{\Delta V}{d}x\right) = \frac{V}{d}$$

Il suo modulo è quindi indipendente da x (cioè costante) tra le due armature.

$$E = \frac{V}{d} = 3.85 \cdot 10^3 \text{ V/m}$$

Il campo elettrico quindi è orientato nella direzione opposta alla crescita del potenziale.

$$\vec{E} = E\hat{\imath}$$

b)

$$\vec{F}_e = -e\vec{E}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_e}{m_\mu} = \frac{-eE}{m_\mu}\hat{\imath} = -3.85 \cdot 10^{-12}\hat{\imath} \text{ m/s}^2$$

c)

$$\vec{F}_L = -e\vec{v} \wedge \vec{B} = -4.80 \cdot 10^{-15}\hat{\imath} \text{ N}$$

Soluzione dell'esercizio 3

a)

Essendo la sbarra omogenea, il suo centro di massa è nel centro di essa.

$$\vec{\tau_m} = -\frac{L}{2}mg\hat{k}$$

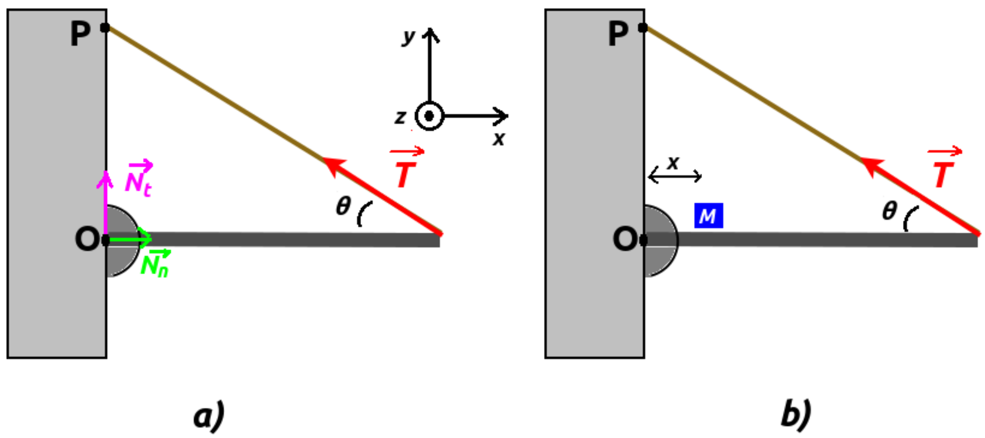

Figura 2

$$\vec{\tau_m} = TL\sin(\pi - \theta)\hat{k} = TL\sin\theta\hat{k}$$

b)
Per l'equilibrio:

$$\vec{T} + \vec{N_n} + \vec{N_t} + m\vec{g} = \vec{0}$$

$$\vec{\tau}_T + \vec{\tau}_m = \vec{0}$$

Proiettando lungo gli assi:

$$\begin{aligned} x: &\qquad N_n - T\cos\theta = 0 \\ y: &\qquad T\sin\theta + N_t - mg = 0 \\ z: &\qquad LT\sin\theta - \frac{L}{2}mg = 0 \end{aligned}$$

Dall'ultima si ricava T:

$$T = \frac{mg}{2\sin\theta} = 14.3 \text{ N}$$

dalla seconda:

$$N_t = \frac{mg}{2} = 4.90 \text{ N}$$

e dalla prima:

$$N_n = \frac{mg}{2}\cot\theta = 13.5 \text{ N}$$

c)
Rispetto al polo O, posizionando il corpo ad una distanza x abbiamo un nuovo momento:

$$\vec{\tau}_M = -xMg\hat{k}$$

Lungo l'asse z, la nuova equazioni dei momenti è:

$$\vec{\tau}_M = LT\sin\theta - \frac{L}{2}mg - xMg = 0$$

Trovando x e imponendo che per T_{max} si abbia x_{max}:

$$x_{max} = L\frac{T_{max}\sin\theta - \frac{1}{2}mg}{Mg} = 15.3 \text{ cm}$$

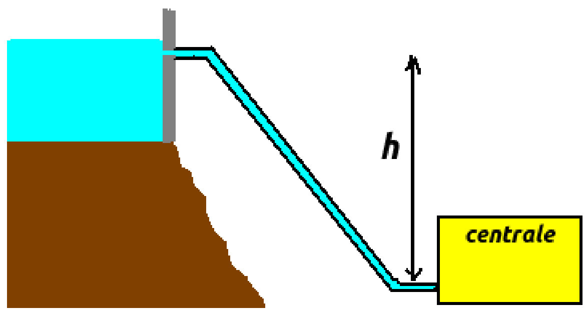

Figura 3

Soluzione dell'esercizio 4

a)

$$A_2 = \frac{A_1 v_1}{v_2} = 0.031 \text{ m}^2$$

b)
Applicando l'equazione di Bernoulli ai due estremi del tubo e ricordando la densità dell'acqua $\rho = 1000$ kg/m^3, si trova:

$$P_2 - P_1 = \rho g h + \frac{1}{2}\rho\left(v_1^2 - v_2^2\right) = 1.7 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

Soluzione dell'esercizio 5

a)
Essendo il gas biatomico: $C_v = \frac{5}{2}R$, $C_p = \frac{7}{2}R$ e $\gamma = \frac{7}{5}$. Ricordarsi di convertire i bar in Pa per avere tutte unità di misura S.I..
La temperatura T_B si trova immediatamente con la legge dei gas perfetti:

$$T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = 903°\text{K}$$

Si frutta il fatto che lungo una trasformazione adiabatica è costante il prodotto:

$$PV^\gamma = costante$$

quindi:

$$P_C V_C^\gamma = P_B V_B^\gamma$$

$$P_C = P_B \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^\gamma$$

$$T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = 684°\text{K}$$

Sfruttando l'isobara e l'isocora:

$$V_A = V_B$$
$$P_A = P_C$$

$$T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = 342°\text{K}$$

b)

$$Q_{AB} = nC_v(T_B - T_A) = 23.3 \text{ kJ}$$

$$Q_{BC} = 0$$

$$Q_{CA} = -19.9 \text{ kJ}$$

c)

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{CA}|}{Q_{BC}} = 14.6\%$$

$$\eta = 1 - \frac{T_a}{T_b} = 62.1\%$$

Relazioni utili

Meccanica e Termodinamica

- *accelerazione di gravità media sulla superficie terrestre*
  g=9.807 m/s^2
- *costante di gravitazione universale*
  $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}

Momenti d'Inerzia di corpi rigidi:

- Sfera = $\frac{2}{5}mr^2$

- densità Piombo: ρ_{Pb}=1.13·10^4 kg/m^3
- calore specifico dell'acqua c_a = 4.186 kJ/(kg°K)
- calore specifico ghiaccio c_g = 2.093 kJ/(kg°K)
- calore latente di fusione ghiaccio $\mathcal{L}_f$ = 333·10^3J/kg
- calore latente di evaporazione dell'acqua $\mathcal{L}_e$ = 2.272·10^6 kJ/kg
- 1 cal = 4.186 J

- $R = 8.31$ Jmol^{-1}K^{-1}
- $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{x_b}{x_a}\right)$

Trasformazioni Adiabatiche:

- PV^γ=costante
- $\frac{T^\gamma}{P^{\gamma-1}}$=costante
- $TV^{\gamma-1}$=costante

gas perfetto	n_l	C_V/R	C_P/R	$\gamma = C_P/C_V$
monoatomico	3	3/2	5/2	5/3
biatomico	5	5/2	7/2	7/5
poliatomico	6	3	4	4/3

Elettromagnetismo e Ottica

- permittività elettrica del vuoto: $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ C^{2}N^{-1}m^{-2}
- costante di Coulomb: $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.988 \cdot 10^9$ Nm^{2}C^{-2}
- permeabilità magnetica del vuoto: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ TmA^{-1}
- massa dell'elettrone: $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg
- massa del protone: $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg
- carica del protone: $e = 1.60 \cdot 10^{-19}$ C

Campo Elettrico dovuto a Potenziale che varia lungo una sola direzione $\hat{\imath}$:

- $\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\hat{\imath}$