Compito di Fisica
Soluzioni
13/07/18

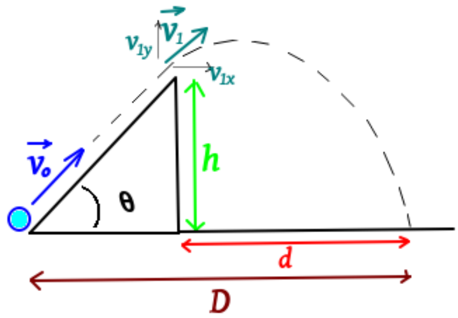

Figura 1

Soluzione dell'esercizio 1

a)

Il problema può essere trattato attraverso la dinamica I), attraverso il teorema delle forze vive II)e anche attraverso la conservazione dell'energia meccanica (essendo l'attrito nullo) III).

Modo I:

Dal diagramma di corpo libero e mettendo il sistema di riferimento con l'asse x parallelo al piano inclinato e diretto in verso ascendente e l'asse y perpendicolare, si trova una accelerazione diretta lungo x:

$$a_x = -g \sin\theta$$

dalla cinematica si trova la velocità finale (per come abbiamo messo il sistema di riferimento, la velocità iniziale era anch'essa tutta lungo x).

Modo II:

Dal teorema delle forze vive:

$$\Delta K = L_g$$

La forza peso è infatti l'unica forza che compie un lavoro non nullo in questo caso.

$$L_g = \vec{F}_g \cdot \vec{l}$$

dove l è l'ipotenusa del triangolo rettangolo.

$$L_g = mg \underbrace{\frac{h}{\sin\theta}}_{l} \underbrace{\cos(\frac{3}{2}\pi - \alpha)}_{-\sin\alpha} = -mgh$$

Il lavoro si può trovare anche dal fatto che la forza peso è conservativa. Quindi:

$$\Delta U = -Lg = -mgh$$

Modo III:
Conservazione dell'energia meccanica:

$$E_i = E_f$$

$$\frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh$$

Indipendentemente dalla scelta della strada I, II o III, alla fine si arriva all'equazione:

$$v_1 = \sqrt{v_o^2 - 2gh} = 7.79 \text{ m/s}$$

b)
La velocità non ha cambiato direzione e la decelerazione è stata parallela ad essa:

$$v_{1x} = v_1 \cos\theta = 3.90 \text{ m/s}$$
$$v_{1y} = v_1 \sin\theta = 6.75 \text{ m/s}$$

c)
Si scrive l'equazione per la quota del moto parabolico per un istante t generico:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

La quota finale che ci interessa è $y(t) = 0$, mentre le condizioni iniziali sono $y_0 = h$ e $v_{0y} = v_{1y}$:

$$0 = h + v_{1y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Si risolve l'equazione di secondo grado, ottenendo due soluzioni, una positiva e una negativa. Si scarta quella negativa, poiché corrisponde ad un punto del prolungamento indietro nel tempo della traiettoria parabolica effettiva. Quindi abbiamo trovato il tempo di caduta:

$$t = 1.63 \text{ s}$$

Nel frattempo, lungo l'asse orizzontale il moto è rettilineo uniforme. Durante questo tempo t orizzontalmente il corpo si sposta di una quantità d dalla cima del piano inclinato:

$$d = v_{1x}t$$

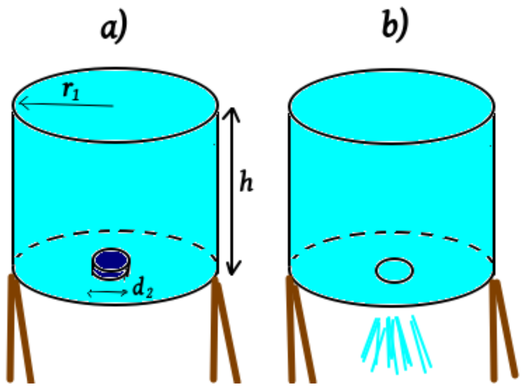

Figura 2

Per trovare D bisogna aggiungere una quantità r che non è altro che la lunghezza del cateto orizzontale del triangolo rettangolo. Dalla geometria si ricava:

$$r = \frac{h}{\tan\theta}$$

Quindi:

$$D = d + r = 7.50 \text{ m}$$

Soluzione dell'esercizio 2

a)
Sapendo che il volume del cilindro $V = h\pi r_1^2$ e che 1 l corrisponde ad 1 $\text{dm}^3 = 10^{-3}\ \text{m}^3$: da cui:

$$h = \frac{V}{\rho_a \pi r_1^2} = 1.59 \text{ m}$$

dove $V = 0.200 \cdot 10^{-1}\ \text{m}^3$.
b)
Dalla legge di Stevino, indicando con P_0 la pressione atmosferica:

$$P_t = P_0 + \rho_a g h = 1.17 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

c)
Troviamo le sezioni iniziali e finali del tubo di flusso:

$$A_1 = \pi r_1^2$$
$$A_2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

Lungo il tubo di flusso valgono l'equazione di continuità e l'equazione di Bernoulli. L'equazione di Bernoulli applicata alle due sezioni (entrambe sono alla pressione atmosferica P_0):

$$P_0 + \rho_a g h + \frac{1}{2}\rho_a v_1^2 = P_0 + \frac{1}{2}\rho_a v_2^2$$

La relazione tra v_1 e v_2 è ricavabile dall'equazione di continuità:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Si ricava da quest'ultima v_1 e si sostituisce nell'equazione di Bernoulli. Semplificando:

$$gh + \frac{1}{2} v_2^2 \left(\frac{A_2}{A1}\right)^2 = \frac{1}{2} v_2^2$$

Quindi alla fine si ottiene:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{A_2}{A1}\right)^2}} = 5.60 \text{ m/s}$$

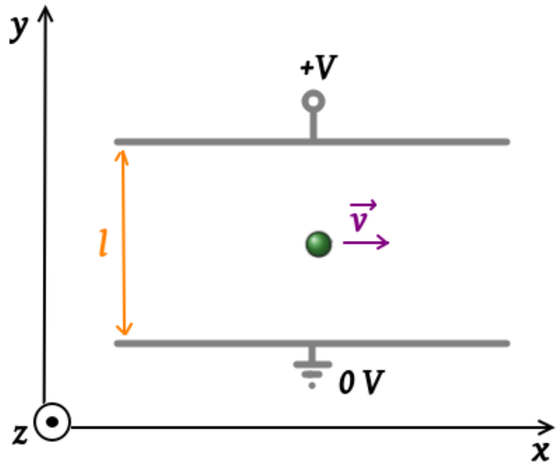

Figura 3

Soluzione dell'esercizio 3

a)

$$\vec{E} = -\frac{V}{l} \hat{j}$$

$$|\vec{E}| = \frac{V}{l} = 3.33 \cdot 10^3 \text{ N/C}$$

b)
Trascurando l'attrito viscoso dell'aria le forze in gioco sono la spinta di Archimede $\vec{F_A}$ (per via del fatto che la gocciolina è immersa in un fluido), la forza di gravità $\vec{F_g}$ (perché è immersa in un campo gravitazionale) e la forza di Coulomb $\vec{F_e}$ (perché è immersa in un campo elettrico).

$$\vec{F_A} = \rho_a g V \hat{j}$$

dove $\mathcal{V}$ è il volume della gocciolina sferica e ρ_a è la densità dell'aria:

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = 4.191 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m}^3$$

$$\vec{F}_g = -mg\hat{j}$$

dove m è la massa della gocciolina:

$$m = \rho_o\mathcal{V} =$$

dove ρ_o è la densità dell'olio.

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = -\frac{qV}{l}\hat{j}$$

La risultante $\vec{R}$ è:

$$\vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_g + \vec{F}_e$$

Tutte le forze hanno direzione lungo l'asse y, quindi proiettando su questo asse:

$$y: \qquad R = \rho_a g V - mg - \frac{qV}{l} = -3.37 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N}$$

$$\vec{R} = -3.37 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N}\hat{j}$$

Dalla seconda legge di Newton:

$$\vec{a} = \frac{\vec{R}}{m} = -875\ \mathrm{m/s}\hat{j}$$

$$|\vec{a}| = 875\ \mathrm{m/s}$$

C)
La forza di Lorentz $\vec{F}_L$ deve avere stessa direzione e modulo e verso opposto rispetto a $\vec{R}$. Dal modulo:

$$|\vec{F}_L| = |\vec{R}|$$
$$qvB = R$$

$$B = \frac{R}{qv} = 1.12\ \mathrm{T}$$

La direzione di $\vec{F}_L$ è lungo l'asse y, diretta verso l'alto per annullare $\vec{R}$. La velocità è lungo l'asse x verso destra. Quindi, dato che:

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

dalla regola della mano destra si deduce che $\vec{B}$, per avere la giusta direzione e verso di $\vec{F}_L$ deve essere entrante nel foglio:

$$\vec{B} = -B\hat{k}$$

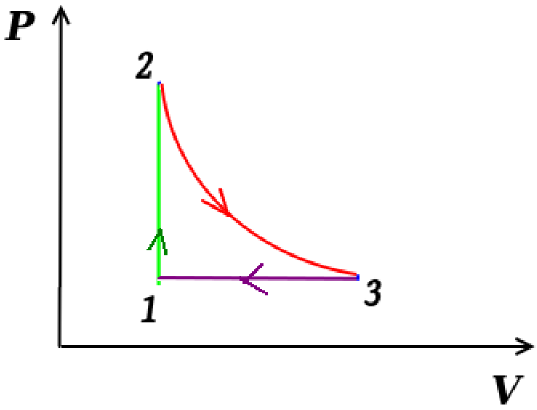

Figura 4

Soluzione dell'esercizio 4

Prima di tutto, il gas è composto da molecole monoatomiche, quindi dalla tabella:

$$C_v = \frac{3}{2}R$$
$$C_p = \frac{5}{2}R$$

Ricordiamoci poi di convertire P_1 in Pa:

$$P_1 = 1.50 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Sfruttando l'isobara e l'isocora si deduce anche che:

$$V_1 = V_2$$
$$P_1 = P_3$$

a)
Si sfrutta il fatto che lungo una trasformazione isoterma la quantità PV resta costante (essendo nell'equazione di stato dei gas perfetti la quantità nRT una costante in una isoterma):

$$P_2V_2 = P_3V_3$$

$$P_2 = P_3\left(\frac{V_3}{V_2}\right) = P_1\left(\frac{V_3}{V_1}\right) = 3.00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Dall'equazione dei gas perfetti applicata in ogni punto:

$$PV = nRT$$

si trova:

$$T_1 = 181°\text{K}$$
$$T_2 = T_3 = 361°\text{K}$$

b)

$$Q_{12} = nC_v(T_2 - T_1) = 13.7 \text{ kJ}$$

Per ricavare $Q23$ sfruttiamo il fatto che il primo principio della termodinamica nell'isoterma diventa:

$$Q_{23} = L_{23}$$

essendo ΔU nell'isoterma uguale a 0. Calcoliamo quindi il lavoro sfruttando l'equazione dei gas perfetti nel sostituire P:

$$L_{23} = \int_{V_2}^{V_3} PdV = \int_{V_2}^{V_3} nRT_2 \frac{dV}{V} = nRT_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) = 4.16 \text{ kJ}$$

quindi:

$$Q_{23} = 4.16 \text{ kJ}$$

$$Q_{31} = nC_p(T_1 - T_3) = -12.0 \text{ kJ}$$

c)
$(Q_{12} + Q_{23})$ rappresenta il calore assorbito, perché i calori sono positivi, mentre Q_{31} quello ceduto:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{31}|}{(Q_{12} + Q_{23})} = 0.134 = 13.4\%$$

$$\eta_c = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 0.500 = 50.0\%$$

Soluzione dell'esercizio 5

a)
Il ghiaccio si dovrà riscaldare fino alla temperatura di fusione ($T_f = 273.15°$K) assorbendo Q_{g1}, dovrà fondersi assorbendo Q_{g2} e poi riscaldarsi (sotto forma d'acqua) fino alla temperatura di equilibrio T_e. L'acqua invece si raffredderà fino alla temperatura T_e scambiando una quantità di calore Q_a.

$$Q_{g1} = m_g c_g (T_f - T_g)$$

$$Q_{g2} = m_g \mathcal{L}_f$$

$$Q_{g3} = m_g c_a (T_e - T_f)$$

$$Q_a = m_a c_a (T_e - T_a)$$

Dato che il contenitore ha pareti adiabatiche, lo scambio di calore con l'ambiente esterno è nullo e quindi la somma dei calori scambiati deve essere nulla:

$$Q_{g1} + Q_{g2} + Q_{g3} + Q_a = 0$$

$$m_g c_g (T_f - T_g) + m_g \mathcal{L}_f + m_g c_a (T_e - T_f) + m_a c_a (T_e - T_a) = 0$$

da cui:

$$T_e = \frac{c_a (m_g T_f + m_a T_a) - Q_{g1} - Q_{g2}}{c_a (m_g + m_a)} = 358°\text{K}$$

b)

$$\Delta S_{g1} = m_g c_g \ln\left(\frac{T_f}{T_g}\right)$$

$$\Delta S_{g2} = \frac{\mathcal{L}_f}{T_f}$$

$$\Delta S_{g3} = m_g c_a \ln\left(\frac{T_e}{T_f}\right)$$

$$\Delta S_a = m_a c_a \ln\left(\frac{T_e}{T_a}\right)$$

$$\Delta S = \Delta S_{g1} + \Delta S_{g2} + \Delta S_{g3} + \Delta S_a = 1.25 \cdot 10^3 \text{ J/°K}$$