ESERCIZIO 1

a) $K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2$

b) $K_2 = \frac{1}{2} m v_2^2$

c) $\overline{P} = \frac{W_{21}}{\Delta t_{21}} = \frac{\Delta K_{21}}{\Delta t_{21}} = \frac{K_2 - K_1}{t_2 - t_1}$

d) $|\vec{f}_A| = \mu_d |\vec{F}_N|$; $\vec{f}_A = m\vec{a}$, $\vec{F}_N = -m\vec{g}$

$\Rightarrow \mu_d = \frac{|a|}{g} = \frac{\Delta v_{32}}{\Delta t_{32}} \cdot \frac{1}{g} = \frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2} \cdot \frac{1}{g}$

e) Si conserva la quantità di moto: indicando con m' la massa del secondo veicolo:

$m v_3 + m' v_3' = m v_4 + m' v_4'$ e si ha: $\begin{cases} v_3' = 0 \\ v_4 = v_4' \end{cases}$

$\Rightarrow m v_3 = (m + m') v_4'$

$m' = m \frac{v_3 - v_4}{v_4}$

f) $K_{perse} = |\Delta K_{43}| = K_3 - K_4$

$K_3 = \frac{1}{2} m v_3^2 + \frac{1}{2} m' v_3'^2 = \frac{1}{2} m v_3^2$

$K_4 = \frac{1}{2} m v_4^2 + \frac{1}{2} m' v_4'^2 = \frac{1}{2} (m + m') v_4^2$

$\Rightarrow K_{perse} = \frac{1}{2} \left[m v_3^2 - (m + m') v_4^2 \right]$

ESERCIZIO 2

a) Corpo 1 sul piano inclinato: agiscono 3 forze:

$$\vec{F}_{P1} = m_1\vec{g} = m_1 g \operatorname{sen}\theta\,\hat{i} - m_1 g\cos\theta\,\hat{j}$$

$$\vec{F}_N = F_N\,\hat{j}$$

$$\vec{F}_{C1} = -F_{C1}\,\hat{i}$$

L'accelerazione è lungo il piano inclinato: $\vec{a}_1 = a_1\hat{i}$

$$\vec{F}_{P1} + \vec{F}_N + \vec{F}_{C1} = m_1\vec{a}_1$$

Componente $\hat{i}$: $m_1 g \operatorname{sen}\theta - F_{C1} = m_1 a_1$

Componente $\hat{j}$: $-m_1 g\cos\theta + F_N = 0$

Corpo 2 sospeso alla fune: agiscono 2 forze:

$\vec{F}_{P2} = m_2\vec{g} = -m_2 g\,\hat{i}_2$ ($\hat{i}_2$ = versore verticale verso l'alto)

$$\vec{F}_{C2} = F_{C2}\,\hat{i}_2$$

$$m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{P2} + \vec{F}_{C2} = (F_{C2} - m_2 g)\,\hat{i}_2 \Rightarrow$$

$$\vec{a}_2 = a_2\,\hat{i}_2 \quad \text{e} \quad m_2 a_2 = F_{C2} - m_2 g$$

La corda ha massa trascurabile e la carrucola ha momento di inerzia trascurabile quindi

$F_{C1} = F_{C2}$ (relazione tra moduli delle forze)

~~Per lo stesso~~ La fune è inestensibile $\Rightarrow a_1 = a_2$

Riassumendo:

$$\begin{cases} m_1 g \operatorname{sen}\theta - F_c = m_1 a \\ F_c - m_2 g = m_2 a \end{cases} \qquad \Rightarrow F_c = m_2(a+g)$$

$$\Rightarrow m_1 g \operatorname{sen}\theta - m_2 a - m_2 g - m_1 a = 0$$

Per determinare a:

$$g(m_1 \operatorname{sen}\theta - m_2) = a(m_1+m_2) \qquad \Rightarrow a = g\,\frac{m_1 \operatorname{sen}\theta - m_2}{m_1+m_2}$$

Per determinare m_1:

$$m_1(g \operatorname{sen}\theta - a) = m_2(a+g) \qquad \Rightarrow m_1 = m_2\,\frac{a+g}{g \operatorname{sen}\theta - a}$$

Attenzione: se venisse ~~dato~~ ~~il~~ valore di a_1 verso il basso, in queste formule $a_1 < 0$.

b) $x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} a t^2$ poiché $v_0 = 0$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{2(x-x_0)}{a} \qquad t = \sqrt{\frac{2(x-x_0)}{a}}$$

Attenzione: ho scelto $\hat{\imath}_2$ verso l'alto quindi

$$x < x_0 \quad \Rightarrow x - x_0 < 0 \quad \Rightarrow \frac{x-x_0}{a} > 0$$

Più semplicemente, se l indica di quanto si abbassa m_2, vale $t = \sqrt{2l/|a|}$.

c) Usiamo la conservazione dell'energia meccanica.
All'inizio il sistema è fermo, quindi l'energia cinetica $K = 0$.
Indicando con h_1 e h_2 l'altezza di m_1 e m_2 rispetto ad un livello di riferimento, l'energia potenziale iniziale è

$$U = U_1 + U_2 = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 .$$

L'energia totale è quindi $E = (m_1 h_1 + m_2 h_2) g$

Alla fine il sistema è in movimento: le due masse con velocità (in modulo) uguali a v', e la carrucola in rotazione a velocità angolare $\omega' = \frac{v'}{R}$.
Il momento di inerzia della carrucola è

$$I = \frac{1}{2} m_c R^2 \quad \text{(si tratta di un cilindro pieno)}$$

e la sua energia cinetica finale $K_c' = \frac{1}{2} I \omega'^2$.
Quindi l'energia cinetica totale finale è

$$K' = \frac{1}{2} m_1 v'^2 + \frac{1}{2} m_2 v'^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{v'}{R}\right)^2$$

incognita

$$= \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right) v'^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{m_c}{2}\right) v'^2$$

Calcoliamo ora l'energia potenziale finale:
Se m_1 si sposta di l_1 lungo il piano inclinato, e sappiamo che si sposta verso l'alto,

m_1 si alza di una quota $\Delta h_1 = l_1 \sin\theta$

$$\Rightarrow U_1' = m_1 g (h_1 + \Delta h_1) = U_1 + m_1 g l_1 \sin\theta$$

Il corpo m_2 invece si abbassa di una quantità pari a l_1 : $\Delta h_2 = -l_1$

$$\Rightarrow U_2' = m_2 g (h_2 + \Delta h_2) = U_2 - m_2 g l_1$$

Per la conservazione dell'energia meccanica deve valere

$$E = K' + U_1' + U_2'$$

Quindi possiamo ricavare la nostra incognita

$$K' = E - U_1' - U_2' = U_1 + U_2 - (U_1 + m_1 g l_1 \sin\theta) - (U_2 - m_2 g l_1)$$

$$= l_1 g (m_2 - m_1 \sin\theta)$$

Più semplicemente, E si conserva $\Rightarrow \Delta K = -\Delta U$

$$\Delta K = K' - K = K'$$

$$\Delta U = m_1 g \Delta h_1 + m_2 g \Delta h_2 = g (m_1 l_1 \sin\theta - \quad l_1)$$

$$\Rightarrow v'^2 = \frac{-\Delta U}{\frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{m_c}{2}\right)} = \frac{2 l_1 g (m_2 - m_1 \sin\theta)}{m_1 + m_2 + \frac{m_c}{2}}$$

e prendendo la radice quadrata si trova v'.

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = v' (-\cos\theta\, \hat{i} + \sin\theta\, \hat{j})$$

d) Se il sistema è fermo, la tensione della corda è uguale alla forza peso di m_2:

$F_c = m_2 g$. Ora però il corpo 1 è soggetto alla forza di attrito statico $\vec{f}_1 = f_1 \hat{\imath}$

L'equilibrio delle forze su m_1 nella direzione $\hat{\imath}$ diventa:

$$m_1 g \,\text{sen}\,\theta - m_2 g + f_1 = 0$$

$$\Rightarrow f_1 = g(m_2 - m_1 \,\text{sen}\,\theta)$$

Deve valere $|\vec{f}_1| < \mu_s |\vec{F}_N| = \mu_s m_1 g \cos\theta$

$$\Rightarrow \mu_s > \frac{|\vec{f}_1|}{|\vec{F}_N|} = \frac{g(m_2 - m_1 \,\text{sen}\,\theta)}{m_1 g \cos\theta} = \frac{m_2 - m_1 \,\text{sen}\,\theta}{m_1 \cos\theta}$$

ESERCIZIO 3

a) Prima dell'urto il corpo sulla guida circolare scende sotto l'azione della forza di gravità ed acquista una velocità v_1 tale che $m_1 g R = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gR}$

avendo applicato la conservazione dell'energia meccanica e osservando che il corpo scende di una quota pari ad R, come si vede dal disegno.

L'urto è elastico, quindi possiamo imporre la conservazione dell'energia cinetica, oltre alla conservazione della quantità di moto:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \end{cases}$$

in cui v_1' e v_2' sono incognite.

Risolvendo il sistema si trova:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

ed una analoga scambiando $1 \leftrightarrow 2$ per ricavare v_2'.

b) Se richiediamo che $v_1' = 0$ dobbiamo risolvere il precedente sistema con v_1 e v_2' come incognite:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_2 v_2' \Rightarrow v_2' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_2}$$

Sostituendo nell'equazione dell'energia cinetica troviamo $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1^2 v_1^2 + 2 m_1 m_2 v_1 v_2}{m_2}$

$$\Rightarrow \; v_1 = \frac{2 m_2 v_2}{m_2 - m_1}$$

Sempre dalla formula di prima $m_1 g R = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$

ricaviamo $R = \frac{v_1^2}{2g}$

ESERCIZIO 4

a) $L = \tau t$

b) $I = I_b + I_e = \frac{1}{2} m_b R^2 + m_e R^2 = \left(\frac{1}{2} m_b + m_e\right) R^2$

c) $K = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad \omega = \frac{L}{I} \Rightarrow K = \frac{L^2}{2I}$

↳ velocità angolare dopo l'accelerazione

d) $\overline{P} = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{K}{t}$

e) $P_{max} = (\tau \cdot \omega)_{max} = \tau \cdot \omega_{max} = \tau \cdot \frac{L}{I}$

f) La sabbia si dispone in un cilindro di volume $V_s = \pi R^2 \cdot h/4$

ed la sua massa pari a $m_s = \rho V_s$

e quindi un momento di inerzia pari a

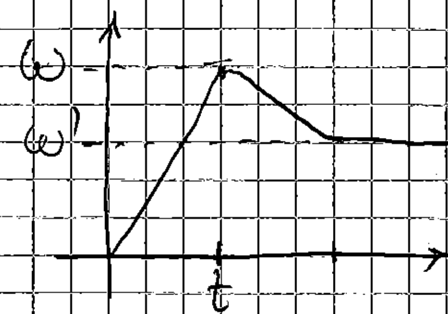
$I_s = \frac{1}{2} m_s R^2$

Dopo lo spegnimento del motore non ci sono momenti di forze esterne, quindi il momento angolare L si conserva: $L' = L$

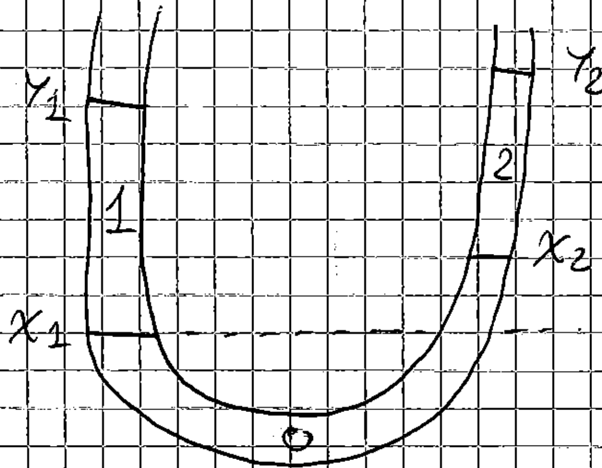
g) $L' = I'\omega'$ con $I' = I + I_s$

$\Rightarrow \omega' = \frac{L}{I'} = \frac{I\omega}{I'} = \omega \frac{I}{I + I_s}$

h)



ESERCIZIO 5



$h_1 = Y_1 - X_1$

$h_2 = Y_2 - X_2$

La pressione relativa alla quota X_1 è la stessa nei due rami, perché sotto c'è un liquido fermo e omogeneo.

A sinistra abbiamo che la pressione relativa è data da $P_1 = \rho_1 g h_1$

mentre a destra è data da $P_1 = \rho_2 g h_2 + \rho_0 g (X_2 - X_1)$

Se voglio sapere la differenza tra i livelli di separazione alle interfacce dei liquidi ho:

$$X_2 - X_1 = \frac{\rho_1 g h_1 - \rho_2 g h_2}{\rho_0 g} = \frac{\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2}{\rho_0}$$

Se voglio la densità del liquido 1, osserviamo che $X_2 - X_1 = (Y_2 - h_2) - (Y_1 - h_1) = Y_2 - Y_1 + h_1 - h_2$

$$\Rightarrow h_1 \rho_1 = [\rho_2 h_2 + \rho_0 (Y_2 - Y_1 + h_1 - h_2)]$$

$$\Rightarrow \rho_1 = \rho_2 \frac{h_2}{h_1} + \rho_0 \left(1 - \frac{h_2 + Y_1 - Y_2}{h_1}\right)$$

Se voglio l'altezza della colonna del liquido 1 risolvo per h_1 e trovo $h_1 = \dfrac{(\rho_2 - \rho_0) h_2 - \rho_0 (Y_1 - Y_2)}{\rho_1 - \rho_0}$