Fisica 1 Elettronica e Telecomunicazioni. Compito del 12/9/2019

LEGGERE LE NOTE SUL RETRO

Problema 1 (7 punti) Le equazioni parametriche di un punto materiale, che descrive un moto ellittico, sono :

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\sin(\omega t)$$

con $A = 2$ m, $B = 4$ m e $\omega = 0.5$ rad/s. Determinare:

(a) Il modulo v della velocità,

(b) Il modulo a dell'accelerazione,

(c) Il modulo a_t dell'accelerazione tangenziale,

(d) Il modulo a_r dell'accelerazione radiale

al tempo $t = 2$ s.
Soluzione: La velocità è

$$\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t) \simeq -0.84 \text{ m/s}$$
$$\dot{y} = B\omega\cos(\omega t) \simeq 1.08 \text{ m/s}$$

e il suo modulo è

$$v = \omega\sqrt{A^2\sin^2(\omega t) + B^2\cos^2(\omega t)} \simeq 1.37 \text{ m/s}.$$

L'accelerazione è

$$\ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t) \simeq -0.27 \text{ m/s}^2$$
$$\ddot{y} = -B\omega^2\sin(\omega t) \simeq -0.84 \text{ m/s}^2$$

e il suo modulo è

$$a = \omega^2\sqrt{A^2\cos^2(\omega t) + B^2\sin^2(\omega t)} \simeq 0.884 \text{ m/s}^2.$$

L'accelerazione tangenziale è la derivata del modulo della velocità rispetto al tempo

$$a_t = \frac{\omega^3}{v}\sin(\omega t)\cos(\omega t)(A^2 - B^2) \simeq -0.498 \text{ m/s}^2$$

e il modulo di quella radiale a_r è determinato da

$$a_t^2 + a_r^2 = a^2$$

ovvero

$$a_r = \sqrt{a^2 - a_t^2} \simeq 0.730 \text{ m/s}^2.$$

Problema 2 (7 punti) Una palla di gomma viene lanciata con una velocità $v_0 = 5$ m/s e un angolo $\theta = 60°$ rispetto all'orizzontale. La palla dopo un certo tempo Δt_0 ritorna al suolo, ad una distanza Δx_0 rispetto al punto di partenza. Durante l'urto la sua velocità (sia orizzontale che verticale) sono ridotte (moltiplicate) di un fattore $\eta = 0.8$, ed ovviamente la componente verticale cambia segno. La palla riparte quindi con lo stesso angolo rispetto all'orizzontale, e riatterra dopo un altro tempo Δt_1 ed ad una ulteriore distanza Δx_1, e così via.

Calcolare

(a) Il valore di Δx_0 e Δt_0,

(b) Il valore di Δx_i e Δt_i all'i-esimo rimbalzo (in forma simbolica),

(c) Lo spazio X percorso prima di fermarsi (infiniti rimbalzi),

(d) Il tempo T trascorso prima di fermarsi.

Si trascuri l'attrito dell'aria.
Soluzione: Le leggi del moto della pallina sono

$$x = v\cos(\theta)t,$$
$$y = v\sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Il tempo Δt_0 del primo ritorno a terra è dato da $y(\Delta t_0) = 0$

$$\Delta t_0 = \frac{2v\sin(\theta)}{g} \simeq 0.88 \text{ s},$$

e lo spazio Δx_0 percorso è

$$\Delta x_0 = \frac{v^2\sin(2\theta)}{g} \simeq 2.21 \text{ m}.$$

Dopo ogni rimbalzo la velocità è moltiplicata per il fattore η, quindi l'intervallo di tempo dell'i-esimo rimbalzo è

$$\Delta t_i = \frac{2v\sin(\theta)}{g}\eta^i$$

e lo spazio Δx_1 percorso è

$$\Delta x_i = \frac{v^2\sin(2\theta)}{g}\eta^{2i}.$$

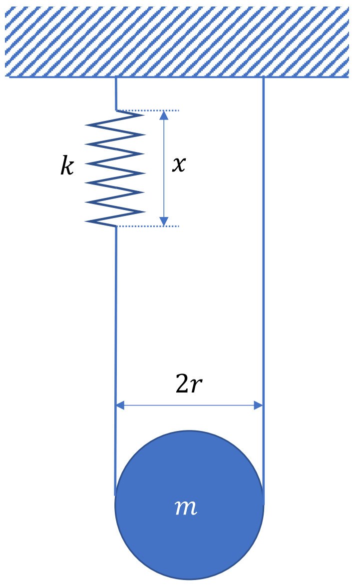
Il tempo totale trascorso sarà quindi

$$T = \sum_{i=1}^{\infty}\Delta t_i = \frac{2v\sin(\theta)}{g}\sum_{i=0}^{\infty}\eta^i = \frac{2v\sin(\theta)}{g(1-\eta)} \simeq 4.42 \text{ s},$$

e lo spazio totale trascorso è

$$X = \sum_{i=1}^{\infty}\Delta x_i = \frac{v^2\sin(2\theta)}{g}\sum_{i=0}^{\infty}\eta^{2i} = \frac{v^2\sin(2\theta)}{g(1-\eta^2)} \simeq 6.14 \text{ m}.$$

Problema 3 (8 punti) Una carrucola di massa $m = 1$ kg e raggio $r = 10$ cm (approssimata con un cilindro uniforme) è sospesa nella gola di una corda di massa trascurabile. Un estremo di tale corda è collegata al soffitto, mentre l'altro è attaccato ad una molla di stante elastica $k = 100$ N/m, come mostrato in figura. La corda non slitta nella gola della carrucola.



Determinare

(a) L'allungamento a riposo Δx della molla.

(b) La relazione tra rotazione della carrucola ($\Delta\theta$) e allungamento/accorciamento Δx della molla.

(c) L'equazione del moto della carrucola (usando la posizione y del suo centro di massa o l'angolo θ di rotazione). Verificate che la soluzione particolare per accelerazioni nulle sia la posizione di riposo del primo punto.

(d) Il periodo T di oscillazione della carrucola.

Soluzione: Quando la carrucola è ferma, il suo peso mg è bilanciato dalla tensione τ della fune (uguale per i due bracci),

$$mg = 2\tau$$

tale tensione è data dall'allungamento della molla, per cui

$$k\Delta x = \tau = mg/2$$

e quindi

$$\Delta x = \frac{mg}{2k} \simeq 4.90 \text{ cm}$$

La carrucola rotola praticamente sulla corda di destra, quindi per una rotazione θ il suo centro di massa scende di una distanza $y = \theta r$ e la molla si allunga di una quantità $\Delta x = 2\theta r$.

Scrivendo la conservazione dell'energia, si ha

$$mgy + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}k\Delta x^2 = \text{const}$$

con $y = -\theta r$, $I = 1/2mr^2$, $\Delta x = 2\theta r$. Sostituendo e derivando rispetto al tempo otteniamo

$$\frac{3}{2}mr\ddot{\theta} = -4kr\theta + mg$$

e effettivamente per $\ddot{\theta} = 0$ si riottiene l'allungamento di equilibrio (per la variabile θ).

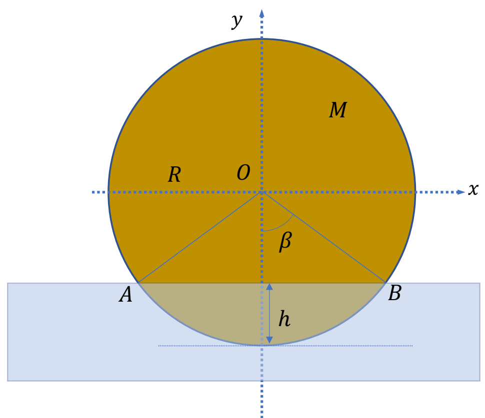
Il periodo $T = 2\pi/\omega$ con

$$\omega^2 = \frac{8k}{3m}$$

è

$$T = \pi\sqrt{\frac{3m}{2k}} \simeq 0.38 \text{ s}.$$

Problema 4 (7 punti) Un cilindro di raggio $R = 1$ m, lunghezza $L = 0.5$ m e massa $M = 200$ kg galleggia sopra un liquido di densità ignota. Il pescaggio del cilindro è $h = 0.3$ m.



(a) Calcolare la superficie S del segmento circolare (differenza tra area del settore circolare e quella del triangolo OAB inscritto) corrispondente ad un angolo al centro uguale a 2β. Esprimere la superficie in funzione della freccia (o saetta) h (le formule sono semplici, ma un po' articolate).

(b) Calcolare la densità ρ del liquido.

Soluzione:

Il pescaggio h è collegato a β

$$h = R(1 - \cos(\beta))$$

quindi

$$\cos(\beta) = (R - h)/R \simeq 0.70,$$

$$\sin(\beta) = \sqrt{h(2R - h)}/R \simeq 0.71$$

e

$$\beta = \arccos((R - h)/R) \simeq 0.80 \ (45.57°).$$

L'area S del segmento circolare è

$$\begin{aligned} S &= R^2(\beta - \sin(\beta)\cos(\beta)) \\ &= R^2 \arccos\left(\frac{R-h}{R}\right) - (R-h)\sqrt{h(2R-h)} \simeq 0.295 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

Da qui si può ottenere il la densità ρ, tramite la spinta di Archimede, infatti

$$SL\rho g = Mg$$

da cui

$$\rho = \frac{M}{LS} \simeq 1353.64 \text{ kg/m}^3$$

Problema 5 (7 punti) Un recipiente adiabatico è diviso in due parti uguali da una parete isolante. Una parte contiene un gas (considerato in condizioni di gas perfetto) a temperatura e pressione iniziali $T_1 = 300$ K e $P_1 = 1 \cdot 10^5$ Pa. Dall'altra parte c'è una quantità dello stesso gas (sempre approssimato come gas perfetto) a temperatura e pressione iniziali $T_2 = 500$ K e $P_2 = 3 \cdot 10^5$ Pa. La parete viene rimossa e i due gas si mescolano. Determinare la temperatura T e la pressione P della miscela di gas nella condizione di equilibrio finale.

Soluzione: Per i due gas abbiamo

$$P_1 V = n_1 R T_1,$$

e

$$P_2 V = n_2 R T_2,$$

mentre per la miscela abbiamo

$$P(2V) = (n_1 + n_2)RT.$$

Dal primo principio abbiamo che $Q = W = 0$, quindi la variazione dell'energia interna $\Delta U = \Delta U_1 + \delta U_2$ è zero:

$$\Delta U_1 = n_1 c_V (T - T_1)$$

$$\Delta U_2 = n_2 c_V (T - T_2)$$

e

$$\Delta U = n_1 c_V (T - T_1) + n_2 c_V (T - T_2) = 0$$

da cui

$$\begin{aligned} T &= \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 + n_2} \\ &= \left(\frac{P_1 V}{R} + \frac{P_2 V}{R}\right)\frac{RT}{2PV} \\ T &= (P_1 + P_2)\frac{T}{2P} \end{aligned}$$

e quindi

$$P = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) \simeq 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

da cui poi inserendolo nelle equazioni dei gas perfetti sopra

$$2PV = \left(\frac{P_1 V}{RT_1} + \frac{P_2 V}{RT_2}\right)RT$$

e quindi

$$T = \frac{2P}{P_1/T_1 + P_2/T_2} \simeq 429 \text{ K}.$$

NOTE

Istruzioni. Scrivere nome, cognome e matricola nell'ultima pagina (e lasciarla possibilmente bianca). Indicare chiaramente quale domanda viene trattata.

Per ogni domanda scrivere succintamente la strategia che si intende seguire (indicando le leggi fisiche usate) e dare la soluzione analitica (con i simboli) e quella numerica (con le unità di misura). In assenza delle indicazioni della strategia usata l'esercizio sarà nullo.

Consegnare solo la bella copia, marcando chiaramente le parti che non devono essere considerate. Trattenere la brutta copia o comunque appuntarsi i risultati per confrontarli con la soluzione (Moodle).

Valutazione. Viene valutato l'aver indicato correttamente le leggi usate, la derivazione analitica, il risultato analitico e numerico corretto. **Se è presente il solo risultato analitico o numerico l'esercizio non viene considerato valido.** ATTENZIONE: gli errori numerici non sono considerati errori gravi a meno che non siano facilmente riconoscibili dall'analisi dimensionale o da valori particolari dei parametri (per esempio se per una scelta dei parametri un risultato viene assurdo o zero senza che sia fisicamente giustificato). Anche per questo, aspettate a sostituire i valori numerici alla fine.

Alcune grandezze utili. Accelerazione di gravità: $g = 9.8$ m/s^2. Momento di inerzia baricentrale di un cilindro di raggio R e massa M: $I_G = (1/2)MR^2$. Momento di inerzia baricentrale di un'asta omogenea di lunghezza L e massa M: $I_G = (1/12)ML^2$. Costante dei gas $R = 8.3$ J/mol K. Conversione calorie-joule: 1 kcal = 4184 J. Pressione atmosferica $P_a = 10^5$ Pa. Calore specifico molare di un gas monoatomico $c_V = (3/2)R$, di un gas biatomico $c_V = (5/2)R$. Densità dell'acqua $\rho_a \simeq 1000$ kg/m^3.

Suggerimenti. LEGGERE ACCURATAMENTE E RILEGGERE IL TESTO DEL PROBLEMA. Attenzione alla conversione tra unità (equivalenze). I problemi possono contenere dati che non servono per trovare la soluzione. Di solito esistono più modi per arrivare alla soluzione. FARE IL DISEGNO del problema, in maniera più accurata possibile e magari da più punti di vista, e disegnare i diagrammi temporali delle componenti della traiettoria ($x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$...).
FARE ATTENZIONE A IMPOSTARE LA CALCOLATRICE IN MODALITÀ "RAD", NON "DEG" O "GRAD" (A MENO CHE NON SI SAPPIA COSA SI STA FACENDO).