

Capitolo 1

Equazioni differenziali ordinarie: stabilità delle soluzioni stazionarie e problemi di biforcazione

In queste pagine si suppone nota allo studente la teoria elementare delle equazioni differenziali ordinarie ed in particolare la modalità di riduzione di una equazione *scalare di ordine n* ad una equazione *vettoriale del primo ordine in \mathbb{R}^n* . Si suppongono noti anche i risultati principali di esistenza e unicità per il problema ai valori iniziali, i problemi di tipo Sturm-Liouville, il concetto di *spazio delle fasi* e la classificazione delle soluzioni non-stazionarie dell'equazione omogenea *lineare* $\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}$ in base alle proprietà della matrice \mathbf{A} costante di dimensione $n \times n$. L'oggetto principale di questi complementi riguarda invece la teoria della stabilità delle soluzioni di equilibrio e della loro biforcazione in dipendenza da parametri scalari. Non verranno proposte dimostrazioni di alcun tipo al fine di contenere al massimo l'argomento in poche pagine, privilegiando maggiormente l'uso di esempi.

Ciò premesso consideriamo l'equazione vettoriale autonoma

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}), \tag{1.1}$$

supponendo, d'ora in poi, che \mathbf{f} sia sufficientemente regolare da garantire l'esistenza e unicità della soluzione per il problema di Cauchy. I *punti (o stati) di equilibrio* dell'equazione (1.1) sono, per definizione, le soluzioni \mathbf{u}_e dell'equazione $\mathbf{f}(\mathbf{u}_e) = 0$. Fissata una di tali soluzioni, nelle ipotesi fatte, $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_e$ è l'unica soluzione che assume inizialmente proprio il valore di equilibrio. Quindi, se occupato inizialmente, ogni stato di equilibrio viene mantenuto indefinitamente nel tempo. Considerando che molti modelli di fenomeni fisici sono descritti da equazioni differenziali ordinarie e che la condizione $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_e$ può risultare difficile da realizzare sperimentalmente, si pongono alcune domande:

- (a) cosa accade se uno stato di equilibrio non è occupato, inizialmente, “in modo esatto”? Il sistema si manterrà, durante la sua evoluzione, “vicino” a detto stato oppure no?

Spesso la risoluzione esplicita della (1.1) non è possibile specialmente se l'equazione è fortemente non lineare.

- (b) Se il sistema si mantiene “vicino” ad un suo stato di equilibrio durante la sua evoluzione, è possibile applicare una procedura di “linearizzazione” e scrivere la soluzione approssimata in modo esplicito?

Spesso nelle applicazioni l'equazione si presenta nella forma

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \alpha), \quad (1.2)$$

dove α è un parametro reale (oppure un vettore di parametri).

- (c) In che modo gli stati di equilibrio (se esistono) vengono influenzati da “piccoli errori” nei parametri delle equazioni?

Le risposte a queste domande sono centrali in tutta la modellistica di fenomeni fisici basata sulle equazioni differenziali.

1.1 Equilibrio, stabilità e linearizzazione

È evidente che i punti \mathbf{u}_e rappresentano, nello spazio delle fasi, orbite di soluzioni *stazionarie*, cioè tali che $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_e$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, dato che una siffatta soluzione ha derivata identicamente nulla.

▲ ESEMPIO 1.1. *Il pendolo semplice è forse il più classico esempio normalmente utilizzato per familiarizzare con le equazioni differenziali in ambito applicativo. Si tratta di un sistema ad un grado di libertà descritto quindi da una singola equazione scalare del secondo ordine nella variabile (lagrangiana) $\vartheta(t)$ che descrive la posizione dell'asta del pendolo rispetto alla verticale (orientata dall'alto verso il basso) passante per il punto O di sospensione: in assenza di attriti e immaginando che tutta la massa m del sistema sia concentrata nel baricentro G (collegato ad O tramite una asta rigida di lunghezza ℓ), l'evoluzione di $\vartheta(t)$ è descritta dall'equazione*

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{\ell} \sin \vartheta. \quad (1.3)$$

che si riscrive nello spazio delle fasi nella forma $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$ con $\mathbf{u} = (u_1, u_2) = (\vartheta, \vartheta')$ e $\mathbf{f}(u_1, u_2) = (1, -(g/\ell) \sin u_1)$. Esistono (a meno di multipli di π) due soluzioni stazionarie

$\mathbf{u}_e^{(1)} = (0, 0)$ e $\mathbf{u}_e^{(2)} = (\pi, 0)$ delle quali solo la prima è “osservabile” sperimentalmente. La soluzione $\vartheta(t)$ corrispondente a dati iniziali $\vartheta(0), \dot{\vartheta}(0)$ non è elementarmente esprimibile mediante funzioni elementari ma comunque completamente nota da un punto di vista qualitativo. Il problema è più semplice nel caso se si “linearizza” la funzione $\sin \vartheta$ intorno alle posizioni di equilibrio e si trascurano i termini di tipo $o(\vartheta)$ o $o(|\vartheta - \pi|)$:

$$\ddot{\vartheta} \simeq -\frac{g}{\ell}\vartheta, \quad \ddot{\vartheta} \simeq -\frac{g}{\ell}(\vartheta - \pi). \quad (1.4)$$

L’integrazione esplicita delle (1.4) è assolutamente elementare e trattata diffusamente in tutti i testi di meccanica analitica e di equazioni differenziali ordinarie. In particolare si prova la natura periodica delle soluzioni non stazionarie e la “non realizzabilità” sperimentale della soluzione $\vartheta(t) = \pi$. Un modello più vicino ad un pendolo “reale” dovrebbe tenere conto di inevitabili attriti meccanici presenti sia nel punto di incenerimento dell’asta sia dell’attrito viscoso dovuto alla presenza dell’aria. Ad esempio, ipotizzando una legge lineare per l’attrito viscoso, si ha

$$\ddot{\vartheta} = -\gamma\dot{\vartheta} - \frac{g}{\ell}\sin \vartheta, \quad (1.5)$$

dove γ è un coefficiente d’attrito positivo e costante. Versioni più complicate della (1.3) nascono se la distribuzione di massa attorno al baricentro G non è geometricamente uniforme. Ne vedremo un esempio in seguito (vedere a pagina 15).

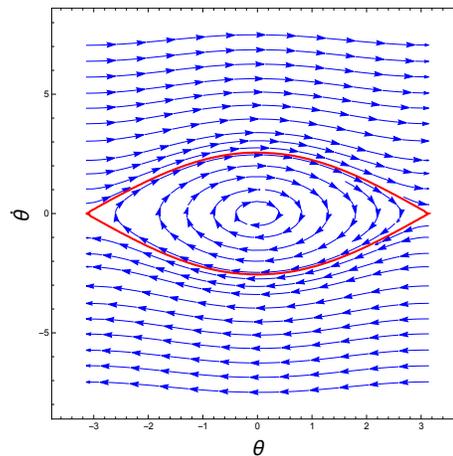


Figura 1.1. Orbite associate all’equazione (1.3) nello spazio delle fasi $(\vartheta, \dot{\vartheta})$. È mostrata anche la separatrice (Hamiltoniana del sistema) che separa la regione in cui si ottengono solo orbite chiuse (oscillazioni attorno alla soluzione $\mathbf{u}_e^{(1)}$) da quella in cui il pendolo esegue giri completi transitando in $\vartheta = \pi$ con velocità non nulla.

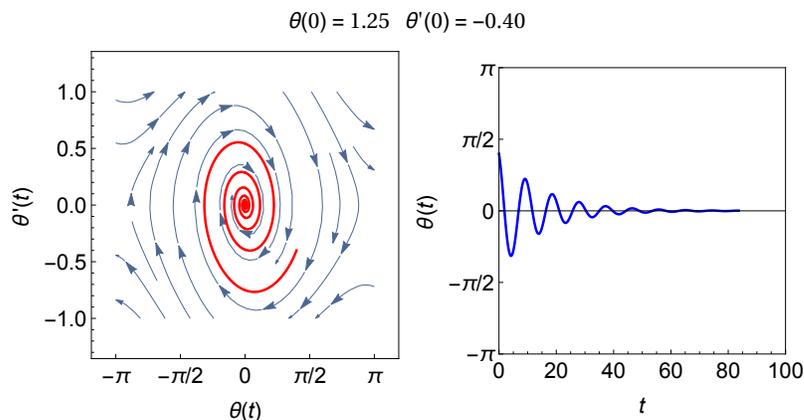


Figura 1.2. Orbite associate all'equazione (1.5) nello spazio delle fasi $(\vartheta, \dot{\vartheta})$. L'attrito smorza le orbite che non sono più chiuse e tendono asintoticamente alla soluzione stazionaria $\vartheta = 0$.

Mettiamo ora in luce alcune proprietà caratteristiche delle soluzioni di equilibrio.

TEOREMA 1.1. *Supponiamo che la (1.1) abbia soluzioni globali nel tempo. Un punto di equilibrio u_e può essere raggiunto da soluzioni della (1.1), che si originano da un dato iniziale $u_0 \neq u_e$, solo in un intervallo di tempo infinito.*

Il prossimo risultato inverte e completa il teorema precedente mostrando che i punti di equilibrio sono *tutti e soli* quelli che possono essere raggiunti da una soluzione non-stazionaria in un tempo infinito.

TEOREMA 1.2. *Nelle stesse ipotesi del teorema 1.1, se una soluzione u di (1.1) ha per limite un punto u_e dello spazio delle fasi per $t \rightarrow \pm\infty$, allora u_e è un punto di equilibrio di (1.1).*

Oltre alle soluzioni di equilibrio, sono molto importanti le soluzioni *periodiche*, cioè quelle soluzioni tali che $\mathbf{u}(t + T) = \mathbf{u}(t)$ per un opportuno $T \in \mathbb{R}$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$. Le soluzioni periodiche danno luogo, nello spazio delle fasi, a curve semplici¹ e chiuse dette *cicli*. Tali orbite periodiche possono tuttavia esistere solo se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$ (si veda in proposito la nota a piè di pagina 32).

Da quanto detto sopra si deduce che *le orbite delle soluzioni di (1.1) possono essere solo di tre tipi: punti di equilibrio, cicli e curve semplici non chiuse (queste ultime sono quindi le sole traiettorie non-stazionarie e non-periodiche).*

¹ Le orbite non possono mai “intrecciarsi” in un punto, pena la violazione della proprietà di unicità della soluzione che passa per quel punto.

1.2 Equilibri stabili e instabili

È opportuno introdurre qualche definizione.

◇ DEFINIZIONE 1.1 *L'equilibrio \mathbf{u}_e è detto stabile se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che per ogni condizione iniziale \mathbf{u}_0 tale che $|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_e| < \delta_\varepsilon$, la soluzione è tale che*

$$|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_e| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

L'equilibrio \mathbf{u}_e è detto asintoticamente stabile se è stabile e se, inoltre, esiste un intorno \mathcal{D}_e di \mathbf{u}_e tale che se $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{D}_e$, allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_e.$$

Il più grande \mathcal{D}_e verificante la condizione suddetta è chiamato bacino di attrazione di \mathbf{u}_e .

Uno stato di equilibrio che non è stabile viene detto *instabile*. Gli stati di equilibrio instabili non sono di fatto osservabili in natura. Pertanto solo gli equilibri stabili hanno interesse fisico. È bene anche notare che il concetto di stabilità è di natura *locale* in \mathbb{R}^n (lo spazio dove “vive” la soluzione $\mathbf{u}(t)$). Infatti se vogliamo che il sistema non si allontani da uno stato di equilibrio stabile oltre un certo limite prefissato (il raggio dell'intorno centrato in \mathbf{u}_e di raggio ε) occorre scegliere una condizione iniziale sufficientemente prossima a \mathbf{u}_e (cioè nell'intorno centrato in \mathbf{u}_e di raggio δ_ε).

Se \mathbf{u}_e è asintoticamente stabile con bacino di attrazione coincidente con tutto \mathbb{R}^n si parla di stabilità asintotica *incondizionata* (o *globale*), di stabilità asintotica *condizionata* in caso contrario.

Nel caso di una singola equazione scalare del primo ordine la ricerca e studio della stabilità degli equilibri è elementare, come mostrano gli esempi che seguono

▲ ESEMPIO 1.2. *Data $\dot{u} = 1 - u^2$ gli equilibri sono $u_e(t) = \pm 1$. Dal segno di $f(u) = 1 - u^2$ si deduce subito che $u_e(t) = 1$ è asintoticamente condizionatamente stabile con $\mathcal{D}_e = (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ mentre $u_e(t) = -1$ è instabile. La figura 1.3 mostra il comportamento delle traiettorie. Si noti che l'andamento delle traiettorie in questo caso può essere desunta anche direttamente perché la famiglia delle soluzioni è disponibile in modo esplicito:*

$$u(t) = \frac{e^{2t} - e^{2c_1}}{e^{2c_1} + e^{2t}}.$$

▲ ESEMPIO 1.3. *Data $\dot{u} = 1 - \ln u$, l'unico equilibrio possibile è $u_e(t) = e$. A differenza dell'esempio precedente, le soluzioni non stazionarie non sono disponibili in forma esplicita. Dal segno di $f(u) = 1 - \ln u$ si deduce comunque che $u_e(t) = e$ è asintoticamente condizionatamente stabile con $\mathcal{D}_e = (0, e) \cup (e, +\infty)$. La figura 1.3 mostra il comportamento delle traiettorie.*

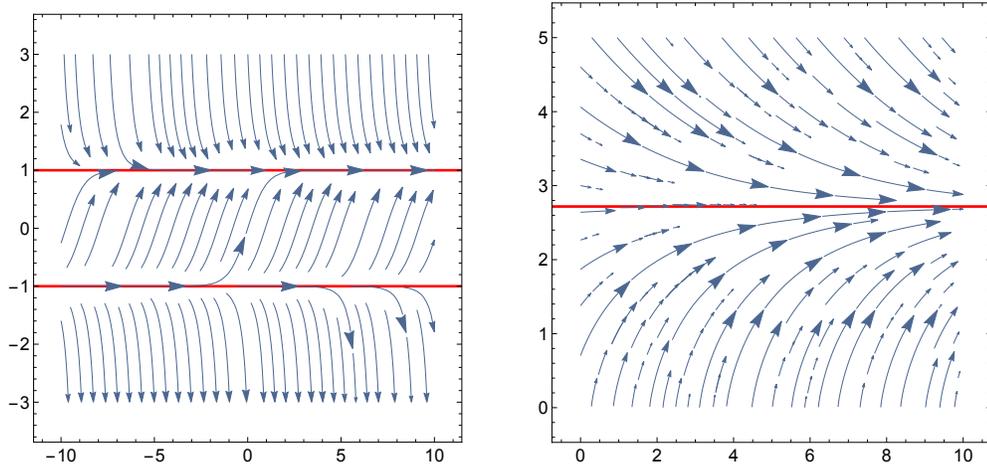


Figura 1.3. Andamento qualitativo delle soluzioni non stazionarie in un intorno degli equilibri (in rosso) nel caso dell'esempio 1.2 (a sinistra) e dell'esempio 1.3 (a destra)

1.3 Stabilità lineare

Se \mathbf{f} è sufficientemente regolare in un suo stato di equilibrio *isolato*² \mathbf{u}_e allora si potrà scrivere, per ciascuna componente

$$f_i(\mathbf{u}) \cong f_i(\mathbf{u}_e) + (\mathbf{u} - \mathbf{u}_e) \cdot \nabla f_i(\mathbf{u}_e) + o(|\mathbf{u} - \mathbf{u}_e|), \quad (1.6)$$

dove “ o ” è il simbolo di Landau. Per definizione, risulta $f_i(\mathbf{u}_e) = 0$ per ogni i ; se $|\mathbf{u} - \mathbf{u}_e|$ è sufficientemente piccolo diremo che $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_e$ è una (*perturbazione infinitesima*) di \mathbf{u}_e e il sistema *non-lineare*

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad (1.7)$$

si può approssimare con la *sua forma linearizzata*

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathcal{J}(\mathbf{u}_e)\mathbf{v}, \quad (1.8)$$

dove

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{u}) \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

è la matrice Jacobiana di tipo $n \times n$ della funzione \mathbf{f} e dove si è posto $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_e$.

² Tale cioè che in un suo intorno non vi sia nessun altro punto di equilibrio.

Lo studio della stabilità lineare dell'equilibrio isolato \mathbf{u}_e della (1.7) equivale, almeno fino a che \mathbf{v} si mantiene “piccolo”, a quello della stabilità della soluzione $\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$ (origine dello spazio delle fasi) per l'equazione (1.8) ed è proprio a quest'ultima che d'ora in poi faremo riferimento.

La (1.8) è un'equazione lineare a *coefficienti costanti* omogenea che, come sappiamo dai corsi istituzionali, ha soluzioni facilmente determinabili attraverso lo studio degli autovalori di $\mathcal{J}(\mathbf{u}_e)$. Queste soluzioni sono somme di esponenziali che moltiplicano costanti, un polinomio in t o funzioni di tipo seno-coseno. Per $t \rightarrow +\infty$ il termine dominante è l'esponenziale col maggior coefficiente nell'esponente che, come sappiamo, risulta essere la parte reale di un autovalore di $\mathcal{J}(\mathbf{u}_e)$. Pertanto se la parte reale di *tutti* gli autovalori è negativa allora la soluzione tenderà a zero per $t \rightarrow +\infty$.

Ciò premesso, di fondamentale importanza è il seguente

TEOREMA 1.3. (CRITERIO DI STABILITÀ LINEARE) *Se f è due volte differenziabile in \mathbf{u}_e , e la matrice Jacobiana di f non è identicamente nulla, denotati con λ_i ($i = 1, \dots, n$) gli autovalori di $\mathcal{J}(\mathbf{u}_e)$ e con $\text{Re}(\lambda_i)$ le loro parti reali, allora*

- (i) *se per ogni $i = 1, \dots, n$ risulta $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, allora \mathbf{u}_e è asintoticamente stabile;*
- (ii) *se esiste un j tale che $\text{Re}(\lambda_j) > 0$, allora \mathbf{u}_e è instabile.*

La stabilità asintotica nel caso (i) è di tipo *condizionato*: solo se $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{D}_e$, intorno sufficientemente piccolo di \mathbf{u}_e , allora $\mathbf{u}(t) \rightarrow \mathbf{u}_e$ per $t \rightarrow +\infty$. In altre parole, *solo se la perturbazione dello stato di equilibrio al tempo $t = t_0$ è sufficientemente piccola*, è possibile garantire che la soluzione del problema *non-lineare* tenderà all'equilibrio in un tempo infinito. Se $\mathbf{u}_0 \notin \mathcal{D}_e$ non si può concludere nulla e \mathbf{u} può avere qualsiasi tipo di comportamento (esplodere in un tempo finito, restare limitata, tendere ad un'orbita periodica, cadere in un altro bacino di attrazione di un differente stato di equilibrio, e così via). Per contro se vale il caso (ii) si può senz'altro concludere che \mathbf{u}_e è instabile rispetto a qualsiasi perturbazione (anche quelle non infinitesime). Si noti ancora che il teorema precedente non dice nulla nel caso in cui esista λ_j con $\text{Re}(\lambda_j) = 0$. In questo caso si dice che \mathbf{u}_e è *marginalmente stabile*.

Il criterio di stabilità lineare può essere parafrasato, brevemente (ma con un po' di imprecisione), in questo modo: *la stabilità lineare implica quella non-lineare a patto di considerare perturbazioni \mathbf{u}_0 di \mathbf{u}_e sufficientemente piccole, mentre l'instabilità lineare implica quella non-lineare quale che sia la perturbazione*.

È bene osservare che il criterio 1.3 non fornisce alcun algoritmo per l'individuazione di \mathcal{D}_e . Inoltre non è possibile inferire alcunché circa l'evoluzione delle soluzioni della (1.7) per $t \rightarrow +\infty$ quando \mathbf{u}_e è linearmente instabile perché la (1.8) non è più valida quando $|\mathbf{u} - \mathbf{u}_e|$ non è sufficientemente piccolo.

1.3.1 Forme canoniche di Jordan: $n = 2$

Gli autovalori di una matrice $n \times n$ sono invarianti per trasformazioni di similitudine, cioè del tipo $\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{M}$ con \mathbb{M} invertibile.

Lo studio di un sistema lineare nel caso $n = 2$ è relativamente semplice: a meno di una trasformazione di similitudine la matrice Jacobiana $\mathcal{J}(\mathbf{u}_e)$ ammette 4 forme canoniche (non simili fra loro):

TEOREMA 1.4. *Sia \mathbb{A} una matrice reale 2×2 ; allora esiste una matrice invertibile \mathbb{M} tale che $\mathbb{J} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{M}$ ha una delle seguenti quattro forme non simili fra loro*

$$\begin{aligned} (a) \quad & \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, & (b) \quad & \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \\ (c) \quad & \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, & (d) \quad & \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dove $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \alpha$ e β sono numeri reali tali che $\beta > 0$ e $\lambda_1 > \lambda_2$.

La matrice \mathbb{J} è detta *forma canonica di Jordan* di \mathbb{A} . Nel caso $n = 2$ l'equazione caratteristica

$$p_{\mathbb{A}}(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} \mathbb{A} + \det \mathbb{A} = 0,$$

ha le soluzioni

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(\operatorname{tr} \mathbb{A} + \sqrt{\Delta} \right), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \left(\operatorname{tr} \mathbb{A} - \sqrt{\Delta} \right),$$

con

$$\Delta = (\operatorname{tr} \mathbb{A})^2 - 4 \det \mathbb{A}.$$

Poiché matrici simili hanno gli stessi autovalori, è possibile classificare i vari casi in un diagramma sintetico del piano $\operatorname{tr} \mathbb{A}, \det \mathbb{A}$ (si veda la figura 1.4).

Lo studio delle forme canoniche di Jordan è un po' più complicato nel caso $n = 3, 4$ e non ce ne occupiamo rimandando a testi specializzati. Si può anche mostrare che i casi $n > 4$ sono riconducibili ai precedenti. Ciò rende lo studio dei sistemi lineari autonomi particolarmente semplice.

1.4 Stabilità non-lineare

Il modello linearizzato dell'equazione (1.1) costituisce solo una ragionevole approssimazione della realtà fisica. Esistono anche criteri di stabilità-instabilità applicabili direttamente all'equazione non-lineare (1.1). Fra questi ricordiamo il metodo diretto di Liapunov basato sull'individuazione

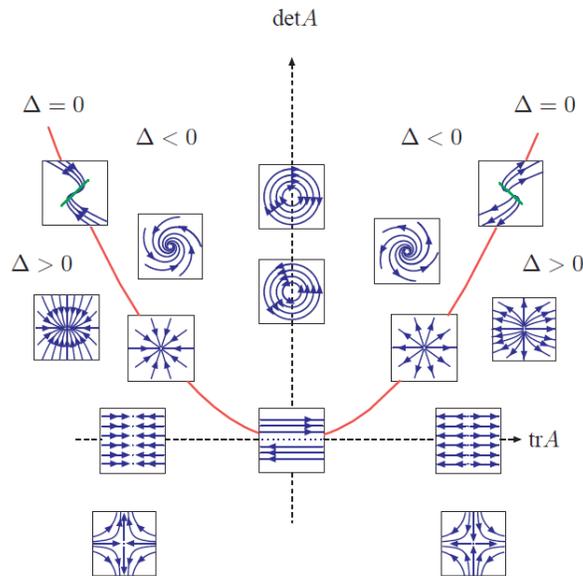


Figura 1.4. Rappresentazione complessiva di come le orbite dei sistemi lineari dipendano, nel caso $n = 2$, dalla traccia e dal determinante di A . La parabola in figura ha equazione $\det A = (\operatorname{tr} A)^2/4$. L'andamento delle orbite denota il carattere stabile-instabile dell'equilibrio e la loro forma nel piano delle fasi. Le varie forme delle "orbite" mostrate nella figura sono note in letteratura col nome di "nodi (propri o impropri), fuochi, stelle, cicli, selle".

di un'opportuna funzione "energia": se tale funzione decresce strettamente lungo le soluzioni non stazionarie della (1.1) nell'intorno di un equilibrio isolato \mathbf{u}_e e ha un minimo locale in \mathbf{u}_e allora questo è (asintoticamente) stabile. Più precisamente

TEOREMA 1.5. (DI LIAPUNOV) *Sia \mathbf{u}_e un equilibrio isolato della (1.1) e \mathcal{D}_e un opportuno intorno aperto di \mathbf{u}_e . Supponiamo che esista una funzione scalare $V(\mathbf{u})$ (detta funzione di Liapunov) tale che*

1. $V \in C^0(\mathcal{D}_e)$ e $V \in C^1(\mathcal{D}_e \setminus \{\mathbf{u}_e\})$,
2. V ha un minimo locale in \mathbf{u}_e ,
3. V è decrescente lungo le soluzioni non stazionarie che hanno origine in $\mathbf{u}_o \in \mathcal{D}_e \setminus \{\mathbf{u}_e\}$, i.e.

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{u}(t, \mathbf{u}_o)) \leq 0, \quad \forall \mathbf{u}_o \in \mathcal{D}_e \setminus \{\mathbf{u}_e\}. \quad (1.9)$$

Allora \mathbf{u}_e è stabile. Se la disuguaglianza (1.9) è stretta, allora la stabilità è di tipo asintotico.

Questo criterio è parzialmente invertibile (teorema di Cetaev) ma è più facile provare l'eventuale instabilità di un equilibrio col metodo lineare.

▲ ESEMPIO 1.4. Si consideri l'equazione (di Van der Pol)

$$\ddot{u} - (\alpha + \beta u^2)\dot{u} + u = 0, \quad (1.10)$$

dove α e β sono parametri reali. Scriviamo innanzitutto l'equazione in forma di sistema differenziale del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2, \\ \dot{u}_2 = (\alpha + \beta u_1^2)u_2 - u_1. \end{cases} \quad (1.11)$$

La forma vettoriale sarà allora

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}),$$

con $\mathbf{u} \equiv (u_1, u_2) \stackrel{\text{def}}{=} (u, \dot{u})$ e

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = (u_2, (\alpha + \beta u_1^2)u_2 - u_1) \equiv (f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2)).$$

Gli equilibri si trovano risolvendo l'equazione $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0$ nel piano delle fasi: come si vede subito, l'unico equilibrio possibile è l'origine $\mathbf{u}_e = \mathbf{0}$. La Jacobiana di \mathbf{f} nel punto di equilibrio è

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}_e = \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix},$$

i cui autovalori sono $\lambda_{1,2}(\alpha) = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}$, che sono complessi coniugati per $|\alpha| < 2$. La tabella 1.1 riassume le conclusioni deducibili in base al principio di stabilità lineare.

Il caso $\text{Re}(\lambda) = 0$ (cioè per $\alpha = 0$) non può essere discusso col metodo di stabilità lineare e si deve usare il metodo di Liapunov. Una funzione di Liapunov per il sistema (1.11) è $V(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2$ che è ovunque positiva tranne nell'origine dove ha un minimo assoluto. Per applicare il criterio di Liapunov si calcola dV/dt lungo le soluzioni di (1.11): con facili passaggi si trova

$$\frac{dV}{dt}(u_1(t), u_2(t)) = (\alpha + \beta u_1^2)u_2^2 \quad (1.12)$$

che risulta non positiva se $\alpha + \beta u_1^2 < 0$. Se $\alpha < 0$ e $\beta \leq 0$ la (1.12) è non positiva e la configurazione di equilibrio è stabile non-linearmente rispetto a qualsiasi perturbazione. Se invece $\beta > 0$ la condizione $\alpha + \beta u_1^2 < 0$ è soddisfatta solo se $u_1^2 \leq u_c^2 = |\alpha|/\beta$. L'origine è stabile asintoticamente per ogni $\alpha < 0$ e anche per $\alpha = 0$ a condizione che $\beta < 0$. Se $\beta > 0$, la curva di livello $V(\mathbf{u}) = V(u_c, 0)$ è la circonferenza $u_1^2 + u_2^2 = |\alpha|/\beta$ ed è la frontiera del dominio Ω_0 in cui $dV/dt < 0$. Scelta una perturbazione iniziale $\mathbf{u}_0 \in \Omega_0$ la corrispondente soluzione $\mathbf{u}(t)$ rimane in Ω_0 per ogni t ovvero $u_1^2 \leq u_c^2$, ciò che è sufficiente a garantire che $dV/dt < 0$ rimane negativa per ogni t .

Tabella 1.1. Analisi della stabilità–instabilità dell’origine per l’equazione (1.10).

α	AUTOVALORI	CLASSIFICAZIONE
$\alpha \leq -2$	REALI E NEGATIVI	NODO STABILE
$-2 < \alpha < 0$	COMPLESSI CON $\text{RE}(\lambda) < 0$	FUOCO STABILE
$\alpha = 0$	PURAMENTE IMMAGINARI ($\lambda = \pm i$)	VORTICE
$0 < \alpha < 2$	COMPLESSI CON $\text{RE}(\lambda) > 0$	FUOCO INSTABILE
$\alpha \geq 2$	REALI E POSITIVI	NODO INSTABILE

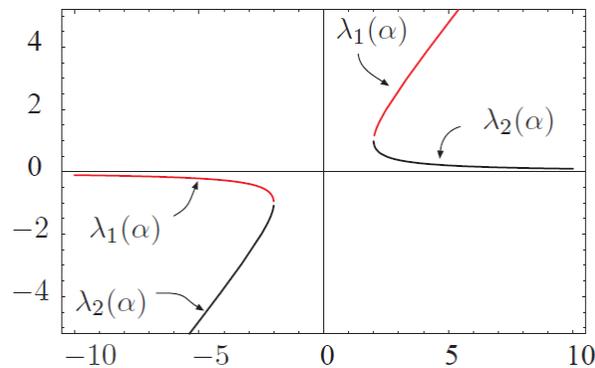


Figura 1.5. Luogo geometrico dei punti del piano $\alpha\lambda$ per i quali $\det(\mathcal{J}(\mathbf{u}_e = \mathbf{0}) - \lambda\mathbb{I}) = 0$ per l’equazione differenziale (1.10).

Il teorema di Liapunov purtroppo non fornisce un criterio per vedere se una funzione V esiste o meno e non dice nemmeno, se esiste, come sceglierla; l’applicabilità del teorema di Liapunov è quindi subordinata, nei casi concreti, dalla difficoltà di individuare la funzione V . Fa eccezione il caso dei sistemi meccanici lagrangiani sia conservativi che dissipativi per i quali una funzione di Liapunov è fornita dall’energia meccanica. I minimi isolati dell’energia corrispondono sempre a equilibri stabili del sistema.

▲ ESEMPIO 1.5. Si consideri l’equazione (di Duffing)

$$\ddot{u} + \dot{u} + \alpha u + \beta u^3 = 0, \tag{1.13}$$

Si vede subito che gli equilibri possibili in \mathbb{R}^2 sono

$$\mathbf{u}_e^{(1)} = (0, 0), \quad \mathbf{u}_e^{(2)} = \left(\sqrt{-\alpha/\beta}, 0\right), \quad \mathbf{u}_e^{(3)} = \left(-\sqrt{-\alpha/\beta}, 0\right)$$

e gli ultimi due esistono solo se $\alpha\beta < 0$. Una funzione di Liapunov è data da

$$V(u_1, u_2) = \underbrace{\frac{\alpha}{2}u_1^2 + \frac{\beta}{4}u_1^4}_{\text{en. potenziale}} + \underbrace{\frac{1}{2}u_2^2}_{\text{en. cinetica}}. \quad (1.14)$$

È sufficiente studiare la componente potenziale di V : si deduce facilmente che $\mathbf{u}_e^{(1)}$ è, per qualsiasi β , instabile se $\alpha < 0$, stabile se $\alpha > 0$, e $\mathbf{u}_e^{(2)}, \mathbf{u}_e^{(3)}$ sono entrambi stabili se $\alpha < 0$ (con $\beta > 0$) e instabili se $\alpha > 0$ (con $\beta < 0$). Le figure 1.6 e 1.7 mostrano, rispettivamente, i minimi di V nel caso $\alpha < 0$ e $\alpha > 0$ e del solo potenziale.

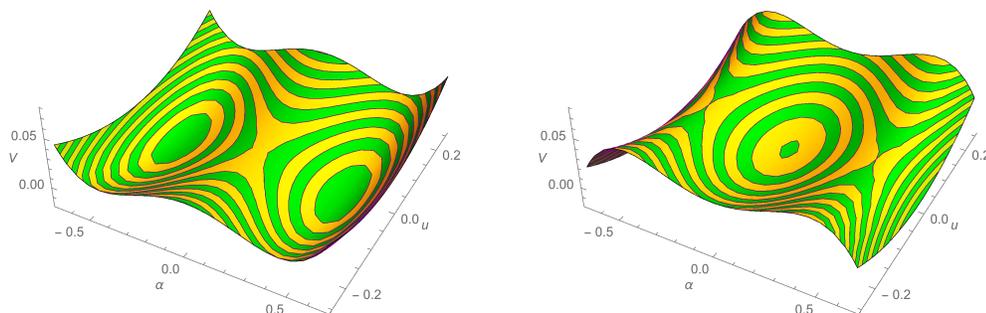


Figura 1.6. La funzione (1.14) per $\alpha < 0$ (a sinistra) e per $\alpha > 0$ (a destra).

1.5 Elementi di teoria della biforcazione

Il sistema differenziale che descrive l'evoluzione dipende solitamente da uno o più parametri reali che rappresentano costanti fisiche caratteristiche del problema oggetto di studio. Supponiamo, per semplicità, di avere a che fare con un unico parametro reale α e facciamo riferimento alla (1.2). Supponiamo che la funzione \mathbf{f} dipenda da \mathbf{u} e da α con regolarità sufficiente a garantire la validità dei Teoremi di esistenza, unicità e dipendenza continua dai dati iniziali. Inoltre, come abbiamo fatto anche nel caso della stabilità, considereremo solo sistemi autonomi. Dalla (1.2) è evidente che le eventuali configurazioni di equilibrio dipenderanno da α : infatti l'equazione

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}, \alpha) = 0 \quad (1.15)$$

definisce implicitamente una curva nello spazio (\mathbf{u}, α) che rappresenta il luogo geometrico \mathcal{L}_0 dei punti di equilibrio (cioè delle soluzioni di (1.15)). In genere l'espressione analitica di tale luogo nella forma $\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_e(\alpha)$ sarà disponibile solo se è possibile, dalla (1.15), ricavare \mathbf{u} in funzione di α o viceversa. Se ciò fosse impossibile si può sempre procedere per via numerica.

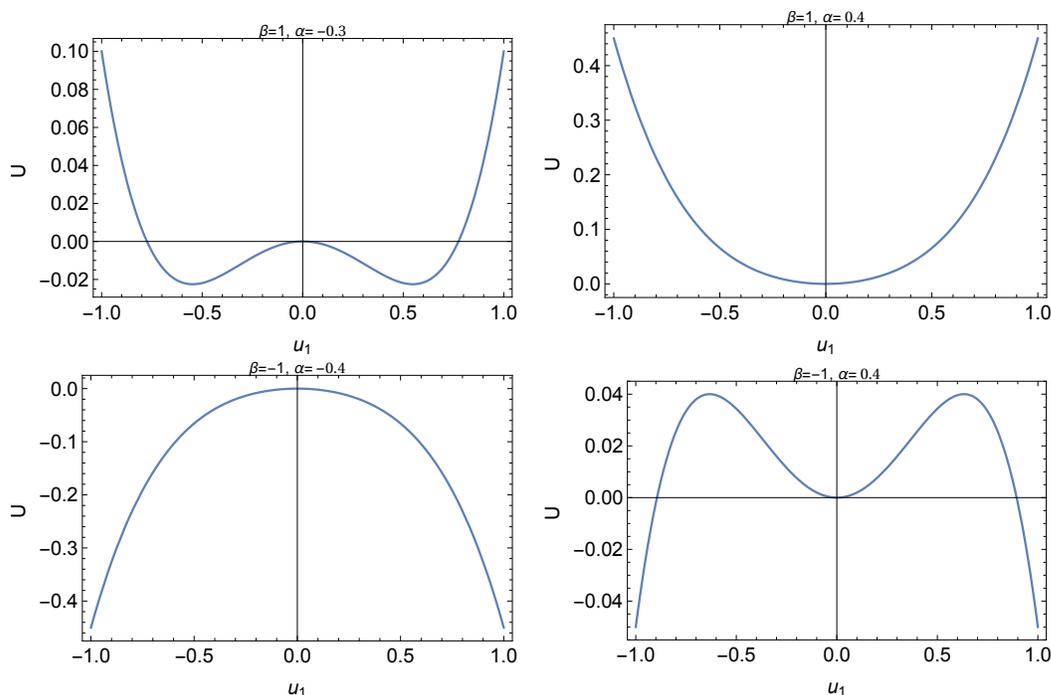


Figura 1.7. Andamento della componente potenziale della (1.14) per vari valori di (α, β) .

In genere il carattere (stabile o instabile) delle configurazioni di equilibrio cambia al variare di α per tutti i punti di \mathcal{L}_0 . Se, oltre ad α , sono presenti altri parametri, il modo più semplice di procedere è di analizzare il comportamento delle soluzioni di equilibrio in funzione di ciascuno di questi parametri, tenendo fissi gli altri. L'analisi è sempre fatta nello spazio (\mathbf{u}, α) che, se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, è lo spazio tridimensionale mentre è l'ordinario piano cartesiano se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^1$, cioè se \mathbf{u} è una funzione scalare. Se invece $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$ si cerca di analizzare, in luogo di $\mathbf{u}_e(\alpha)$, particolari funzioni scalari di \mathbf{u}_e , quali

$$|\mathbf{u}_e(\alpha)| = \sqrt{\sum_{k=1}^n u_{e_k}^2} \quad \text{oppure} \quad |\mathbf{u}_e(\alpha)| = \max_{1 \leq k \leq n} |u_{e_k}|$$

in modo da continuare ad avere una visione semplice del legame fra \mathbf{u}_e e α . I diagrammi così ottenuti si dicono *diagrammi di biforcazione*.

Il luogo \mathcal{L}_0 è solitamente composto da vari “rami” o “diramazioni” che sono tratti (aperti o chiusi) di curva che possono intersecarsi mutuamente e “terminare” in punti al finito di α . Il numero delle coppie $(\alpha, \mathbf{u}_e(\alpha)) \in \mathcal{L}_0$ cambia, in genere, al variare di α : infatti, come mostra la figura 1.8, una retta parallela all'asse u può tagliare la curva degli equilibri in uno, nessuno o in molti punti a seconda della configurazione della curva stessa.

I punti in cui il numero delle soluzioni di equilibrio cambia, si dicono *punti di diramazione*. Nella

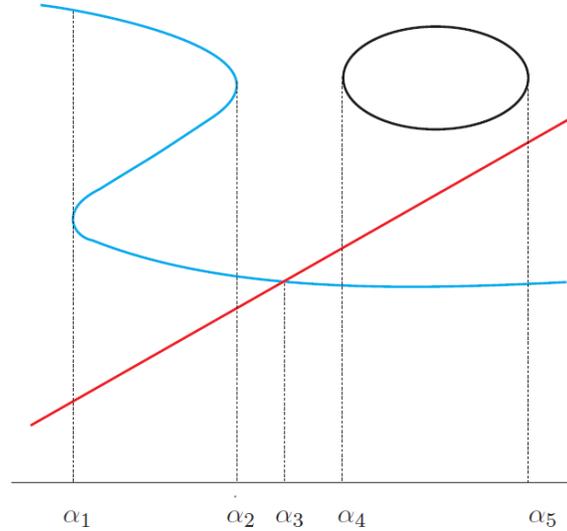


Figura 1.8. La curva degli equilibri è costituita da vari rami. Il numero delle soluzioni di equilibrio cambia al variare di α . Vi sono tre soluzioni se $\alpha = \alpha_1$, $\alpha = \alpha_2$, $\alpha = \alpha_4$ e $\alpha = \alpha_5$, due se $\alpha < \alpha_1$, $\alpha_2 < \alpha < \alpha_3$, $\alpha_3 < \alpha < \alpha_4$ oppure $\alpha > \alpha_5$ e infine quattro se $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ oppure $\alpha_4 < \alpha < \alpha_5$. Dunque α_1 , α_2 , α_4 e α_5 sono punti di diramazione mentre α_3 è un punto di biforcazione.

figura 1.8 il punto corrispondente ad $\alpha = \alpha_3$ ha una natura particolare: per $\alpha = \alpha_3$ due rami distinti del luogo \mathcal{L}_0 si incontrano e in quel punto la tangente a \mathcal{L}_0 non è univocamente definita. Questi punti prendono genericamente il nome di *punti di biforcazione*. Più precisamente

◇ DEFINIZIONE 1.2 *Si dice che una soluzione di equilibrio “biforca” da un’altra in $\alpha = \alpha_b$ se esistono due distinte soluzioni di equilibrio $\hat{\mathbf{u}}_e(\alpha)$ e $\tilde{\mathbf{u}}_e(\alpha)$, continue rispetto ad α e tali che $\hat{\mathbf{u}}_e(\alpha_b) = \tilde{\mathbf{u}}_e(\alpha_b)$. Il punto comune $(\alpha_b, \hat{\mathbf{u}}_e(\alpha_b))$ è detto “punto di biforcazione”.*

È conveniente classificare alcuni tipi di biforcazioni e adottare la convenzione di indicare le linee che formano il luogo degli equilibri con tratto pieno nel caso stabile e con linee tratteggiate nel caso instabile. Come ora vedremo sia i punti d’inversione sia quelli di biforcazione sono normalmente caratterizzati da una variazione stabile-instabile passando da un ramo all’altro. Questo aspetto ha notevole importanza nell’interpretazione fisica degli equilibri forniti dal modello matematico.

◇ DEFINIZIONE 1.3 *Si dice punto di “biforcazione a forcilla” quello in cui uno dei due rami che si intersecano in (α_b, \mathbf{u}_b) si trova interamente da un lato rispetto al piano $\alpha = \alpha_b$. Il punto di biforcazione si dice “transcritico” se i due rami esistono da entrambi i lati.*

Vediamo alcuni esempi.

▲ ESEMPIO 1.6. Consideriamo l'equazione scalare $\dot{u} = \alpha - u^2$. Se $\alpha > 0$, esistono due equilibri $u_e^{(1)}(t) = \sqrt{\alpha}$ e $u_e^{(2)}(t) = -\sqrt{\alpha}$, se $\alpha = 0$ $u(t) = 0$ è l'unico equilibrio. Se $\alpha < 0$ non esistono equilibri. La stabilità si studia facilmente col principio di linearizzazione quando $\alpha > 0$: posto $f(u, \alpha) = \alpha - u^2$ risulta $f_u(\sqrt{\alpha}, \alpha) = -2\sqrt{\alpha} < 0$ per cui $u_e^{(1)}$ è stabile asintoticamente (in modo condizionato). Invece $f_u(-\sqrt{\alpha}, \alpha) = 2\sqrt{\alpha} > 0$ per cui $u_e^{(2)}$ è instabile. Il principio non può essere applicato per $\alpha = 0$ (perché risultando $f_u(0, 0) = 0$ equivale al caso dell'autovalore nullo). D'altra parte risulta $u' = -u^2$ e quindi $u(t)$ se non è stazionaria è sempre decrescente: se $u_o > 0$ risulta $u(t) \rightarrow 0$ ma se $u_o < 0$ risulta $u(t) \rightarrow -\infty$ per $t \rightarrow +\infty$ e quindi l'origine è instabile. Si noti che $(0, 0)$ è un punto di diramazione e che, seguendo la curva luogo degli equilibri, al passaggio per l'origine avviene uno "scambio di stabilità".

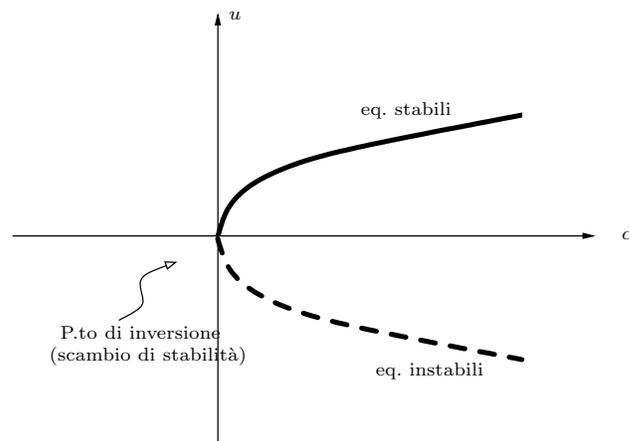


Figura 1.9. L'origine è instabile ed è punto d'inversione (scambio di stabilità) per l'equazione $\dot{u} = \alpha - u^2$: il luogo $(\alpha, \sqrt{\alpha})$ è formato da equilibri stabili, il luogo $(\alpha, -\sqrt{\alpha})$ da equilibri instabili.

▲ ESEMPIO 1.7. Consideriamo l'equazione scalare $\dot{u} = \alpha u - u^2$. Procedendo come nell'esempio precedente si vede che esistono sempre due equilibri, $u^{(1)}(t) = 0$ e $u^{(2)}(t) = \alpha$. Risulta in particolare che $u^{(1)}$ è stabile per $\alpha < 0$ e instabile per $\alpha > 0$. Al contrario $u^{(2)}$ è stabile per $\alpha > 0$ e instabile per $\alpha < 0$. L'origine $(0, 0)$ è un punto di biforcazione stabile in cui si ha scambio di stabilità.

▲ ESEMPIO 1.8. Consideriamo un oggetto pesante, di massa m vincolato in O , libero di ruotare in modo che il suo baricentro rimanga in un piano verticale Π_2 . Supponiamo che il piano Π_2 sia posto in rotazione uniforme con velocità angolare nota $\Omega = \frac{d\varphi}{dt}$ costante attorno all'asse verticale $J = \Pi_1 \cap \Pi_2$ passante per O . Supponiamo inoltre di vincolare il centro di

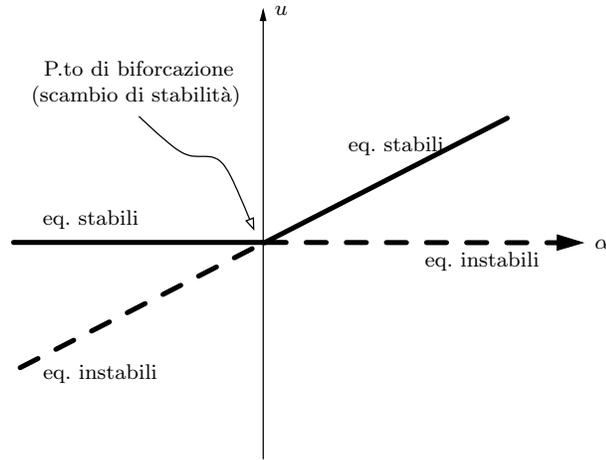


Figura 1.10. L'origine è instabile ed è punto di biforcazione per l'equazione $\dot{u} = \alpha u - u^2$: il luogo $(\alpha, \sqrt{\alpha})$ è formato da equilibri stabili, il luogo $(\alpha, -\sqrt{\alpha})$ da equilibri instabili.

gravità G del corpo mediante una molla elastica all'asse verticale J in modo che durante il moto la molla resti orizzontale (cioè perpendicolare all'asse J , vedere figura 1.11). Chiameremo siffatto sistema meccanico col nome di pendolo centrifugo. Con i vincoli suddetti, il centro di gravità G del pendolo si muove (sotto l'azione delle forze in gioco) su una superficie sferica di raggio pari alla distanza ℓ del centro di gravità da O . La molla è supposta ideale e quindi la forza elastica si scrive

$$\mathbf{f}_e \equiv -h\mathbf{u},$$

con h costante e $\mathbf{u} = (G - H)$. Si assume anche che la cerniera H possa scorrere senza attrito sull'asse J . Il sistema descritto ha un solo grado di libertà, nel senso che se si conosce la posizione angolare ϑ del pendolo nel riferimento ruotante, il moto del pendolo è completamente noto. Usando le equazioni della Meccanica classica nel sistema di riferimento $Oxyz$ solidale al piano Π_2 (in moto rotatorio uniforme attorno a J) e con asse x sovrapposto all'asse OG , l'equazione di evoluzione per ϑ si scrive

$$\ddot{\vartheta} = -\beta(1 + \alpha \cos \vartheta) \sin \vartheta, \quad (1.16)$$

dove

$$\alpha = \frac{2}{mg\ell} [h\ell^2 + (I_x - I_y)\Omega^2],$$

e

$$\beta = \frac{mg\ell}{2I_z},$$

essendo ℓ la lunghezza \overline{OG} , mentre le costanti I_x, I_y e I_z rappresentano i cosiddetti momenti principali d'inerzia attorno agli assi x, y e z . L'equazione (1.16) si riscrive nella forma vettoriale (1.1) ponendo

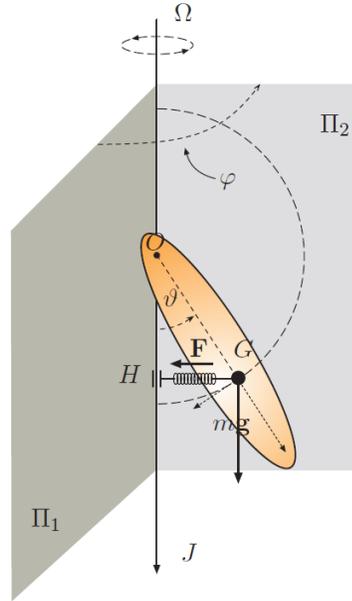


Figura 1.11. Esempio di pendolo *centrifugo*: il corpo solido è vincolato a ruotare attorno al punto di sospensione O restando nel piano Π_2 . Questo piano ruota con velocità angolare $\Omega = \frac{d\varphi}{dt}$ uniforme attorno ad un asse verticale passante per O . Il baricentro G è vincolato all'asse di rotazione mediante una molla elastica la cui estremità H è libera di scorrere lungo l'asse verticale di rotazione.

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_2 \\ -\beta(1 + \alpha \cos u_1) \sin u_1 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Le configurazioni di equilibrio sono allora le seguenti

$$\mathbf{u}_e^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

$$\mathbf{u}_e^{(2)} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

$$\mathbf{u}_e^{(3)} = \begin{pmatrix} \arccos\left(-\frac{1}{\alpha}\right) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

L'interesse di questo esempio risiede nel fatto che mentre i primi due equilibri esistono indipendentemente dai parametri, $\mathbf{u}_e^{(3)}$ esiste solo se $|\alpha| \geq 1$ e cioè solo per opportune scelte dei valori numerici assunti da $m, \ell, h, \Omega, I_x, I_y$. Ad esempio, se $I_x \simeq I_y$ l'effetto del termine $(I_x - I_y)\Omega^2$ sul valore di α è trascurabile e la posizione di equilibrio esiste solo se

$$\ell \geq \frac{mg}{2h}, \quad (1.21)$$

cioè solo se o la molla è sufficientemente forte oppure se il centro di gravità dista sufficientemente da O . Se invece $(I_x - I_y)\Omega^2$ non è trascurabile si nota che α è funzione crescente o decrescente di Ω in relazione al segno (positivo o negativo, rispettivamente) di $I_x - I_y$. Supposta verificata la (1.21), nel primo caso risulterà $|\alpha| > 1$ per ogni Ω mentre nel secondo caso esisterà un valore critico della velocità angolare Ω_c tale che per $|\Omega| > \Omega_c$ si ha $|\alpha| < 1$ e $\mathbf{u}_e^{(3)}$ cessa di esistere.

▲ ESEMPIO 1.9. Riprendiamo l'esempio 1.8. Il luogo $\mathcal{L}_0 \subset \mathbb{R}^3$ è facilmente descrivibile. Innanzitutto è chiaro che ogni soluzione di equilibrio ha $u_2 = 0$ (velocità nulla) e quindi il luogo appartiene tutto al piano che contiene gli assi α, u_1 ; nel piano αu_1 il luogo è descritto dalle due rette $u_1 = 0$ e $u_1 = \pi$ con α arbitrario e tutte le coppie (α, u_1) , per $|\alpha| \geq 1$, tali che $\cos u_1 = -\frac{1}{\alpha}$. Il diagramma risultante nel piano αu_1 è mostrato nella figura 1.12 (ci siamo limitati alle soluzioni $u_1 \in (-\pi/2, 3\pi/2)$).

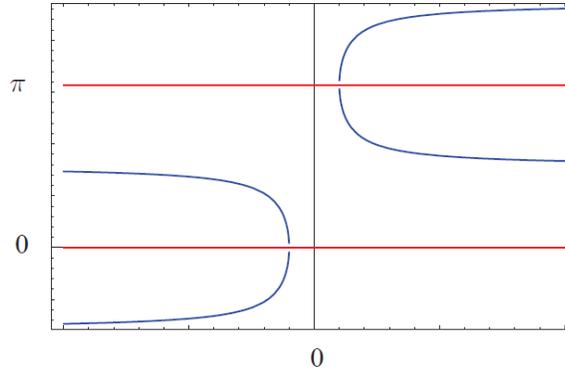


Figura 1.12. Luogo dei punti di equilibrio $\mathbf{f}(\mathbf{u}, \alpha) = 0$ nel piano αu_1 , relativo all'esempio 1.8: le due curve in blu sono il luogo dei punti (α, u_1) tali che $\cos u_1 = -1/\alpha$, le rette in rosso sono rispettivamente $u_1 = 0$ e $u_1 = \pi$. Per tutti i punti di equilibrio $u_2 = 0$.

▲ ESEMPIO 1.10. Consideriamo l'equazione

$$\ddot{y} + \dot{y} + \alpha y + y^3 = 0. \quad (1.22)$$

Posto $\mathbf{u} \equiv (y, \dot{y})$ e $\mathbf{f}(\mathbf{u}, \alpha) = (u_2, -u_2 - \alpha u_1 - u_1^3)$, l'equazione (1.22) si scrive nella forma $\mathbf{u}' = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \alpha)$. Gli equilibri sono i punti \mathbf{u}_e tali che $u_2 = 0$ e $u_1^3 = -\alpha u_1$, cioè $\mathbf{u}_e^{(1)} = (0, 0)$ e

$\mathbf{u}_e^{(2)} = (\pm\sqrt{-\alpha}, 0)$. Se $\alpha > 0$ quest'ultimo non esiste. Il diagramma di biforcazione nel piano αu_1 è mostrato nella figura 1.13. L'origine è quindi un punto di biforcazione e di diramazione.

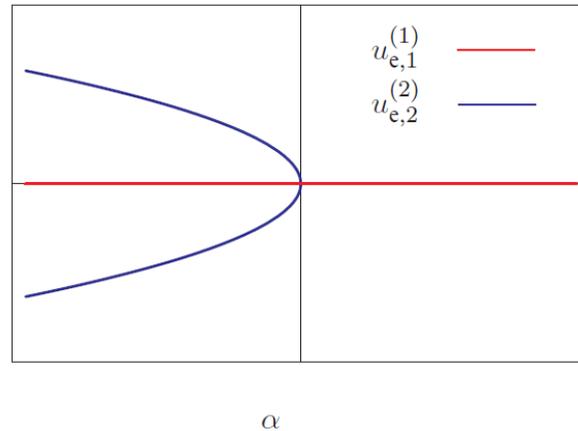


Figura 1.13. Diagramma di biforcazione associato all'equazione differenziale (1.22).

1.6 Scambio di stabilità

Gli esempi svolti in precedenza mostrano che nei punti di biforcazione si osservano sempre fenomeni di “scambio di stabilità”: al variare di α in un intorno di α_b può accadere che la soluzione di equilibrio $u(\alpha)$ rimanga stabile solo se “cambia ramo”. Questo può avvenire in modo regolare oppure no. La discussione in assoluta generalità è possibile ma complicata. Conviene continuare a lasciarci guidare da esempi e da considerazioni non completamente rigorose ma semplici.

TEOREMA 1.6. (DI SCAMBIO DI STABILITÀ (I)) *In tutti i punti regolari di inversione la curva di equilibrio locale $\alpha = \alpha(u)$ è formata da punti stabili da un lato del punto di inversione e instabili dall'altro lato.*

Il teorema di scambio di stabilità vale quindi anche per i punti doppi. La forma più generale del teorema 1.6 è dunque la seguente

TEOREMA 1.7. (DI SCAMBIO DI STABILITÀ (II)) *Supponiamo che tutti i punti singolari dell'equazione $f(u, \alpha) = 0$ siano punti doppi. La stabilità delle soluzioni deve cambiare*

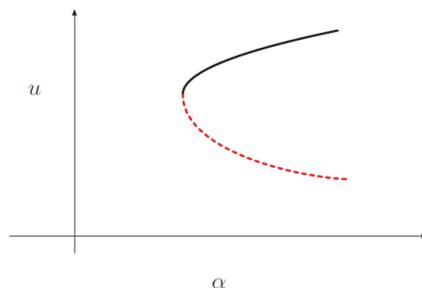


Figura 1.14. Scambio di stabilità in un punto d’inversione.

non solo nei punti regolari di inversione, ma anche in ogni punto singolare (che non sia d’inversione) e solo in tali punti.

Con riferimento al caso particolare rappresentato nella figura 1.15, è facile visualizzare lo scambio di stabilità nei punti di biforcazione: si dà il nome di “supercritiche” alle soluzioni che biforcano da $u = 0$ e che hanno $|u| \neq 0$ per valori di α (positivi nella figura) per i quali $u = 0$ è instabile. Le soluzioni “subcritiche” sono invece quelle che hanno $|u| \neq 0$ per valori di α (negativi nella figura) per i quali $u = 0$ è stabile. Entrambi questi due tipi di soluzioni restano, localmente, tutte da un lato rispetto all’asse u . Si dà invece il nome di “transcritiche” alle soluzioni del terzo tipo considerato; in questo caso la soluzione biforcante esiste, localmente, sia a sinistra che a destra dell’asse $u = 0$. Nel caso supercritico appena α supera il valore 0 vi è uno *scambio di stabilità regolare* fra una soluzione stabile (quella nulla) con l’altra soluzione stabile ($\alpha = \alpha(u)$). Nel caso subcritico questo scambio di stabilità *regolare* è assente: transitando per $\alpha = 0$ si passa da una soluzione stabile ad una instabile (quindi fisicamente irrealizzabile dal sistema). Il sistema è quindi costretto a cercarsi altri equilibri “lontani”: soluzioni corrispondenti a valori positivi di α e che si originano in vicinanza di $u = 0$ (instabile) tenderanno ad allontanarsi definitivamente in direzione del bacino di attrazione di altri equilibri (dislocati sulla parte stabile di $\alpha = \alpha(u)$).

L’esempio 1.6 mostra lo scambio di stabilità in un punto d’inversione, l’esempio 1.7 lo scambio di stabilità di tipo transcritico in un punto di biforcazione. Gli esempi 1.9 e 1.10 mostrano invece biforcazioni “a forcina” per le quali vogliamo ora analizzare meglio lo scambio di stabilità. Lo strumento naturale per effettuare questo tipo di analisi è il *principio di stabilità lineare* introdotto a pagina 7 a cui, in presenza di autovalori a parte reale nulla, è necessario accoppiare il metodo di Liapunov.

▲ **ESEMPIO 1.11.** *Applichiamo il principio di stabilità lineare all’equazione (1.22): per l’equilibrio $u_1(\alpha) = 0$ abbiamo*

$$\mathcal{J}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -1 \end{pmatrix},$$

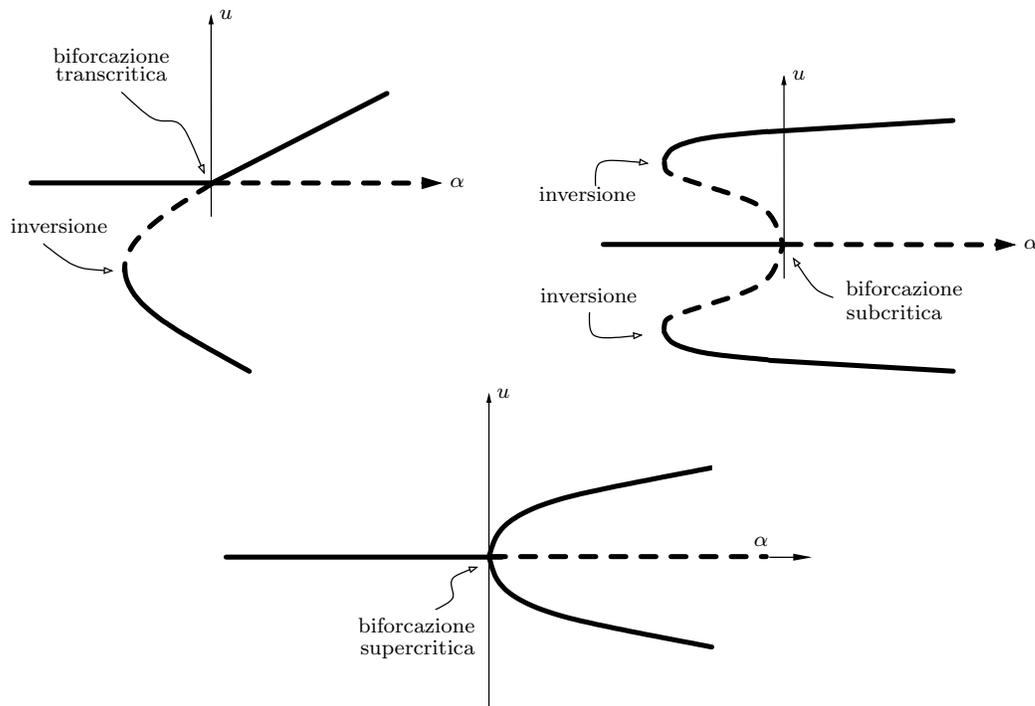


Figura 1.15. Biforcazione della soluzione nulla nei tre casi possibili. Per α che passa da valori negativi a positivi, nel caso supercritico la soluzione nulla perde stabilità e biforca lungo la soluzione stabile $\alpha = \alpha(u)$ che comunque esiste solo per $\alpha > 0$. Nel caso subcritico, una volta persa la stabilità, la soluzione nulla non dispone, nelle sue immediate vicinanze, di un ramo stabile lungo cui biforcarsi né a destra né a sinistra dell'asse u . Nel caso transcritico la soluzione nulla diventa instabile e trova, per $\alpha > 0$ un ramo stabile disponibile lungo cui “proseguire”.

i cui autovalori sono $\lambda_{1,2}(\alpha) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha}}{2}$. Come si vede anche dal grafico (figura 1.16), gli autovalori sono reali solo per $\alpha \leq 1/4$; se $\alpha < 0$ c'è un autovalore positivo e quindi in tal caso l'origine è instabile. Se invece $\alpha \in (0, 1/4)$ entrambi gli autovalori sono negativi e quindi l'origine è linearmente stabile. Se $\alpha > 1/4$ gli autovalori sono complessi coniugati con parte reale sempre negativa. In tal caso l'origine è linearmente stabile. Più precisamente, tenendo conto della classificazione introdotta nelle pagine precedenti, abbiamo il quadro descritto dalla tabella 1.2.

Il criterio di stabilità lineare non consente alcuna conclusione se uno degli autovalori ha parte reale nulla (in questo caso per $\alpha = 0$). Se analizziamo ora uno qualsiasi degli equilibri $u_1(\alpha) = \pm\sqrt{\alpha}$ esistenti quando $\alpha < 0$, abbiamo

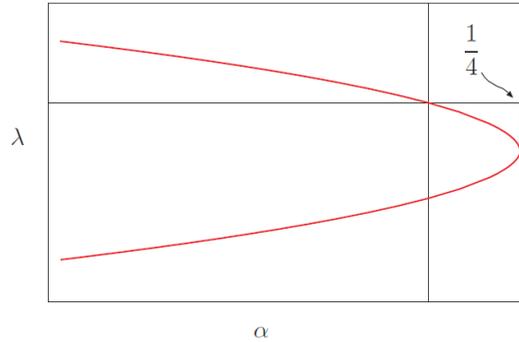


Figura 1.16. Grafico degli autovalori della matrice $\mathcal{J}(0)$ in funzione di α per l'equazione differenziale (1.22).

Tabella 1.2. Analisi della stabilità–instabilità dell'origine per l'equazione (1.22)

α	AUTOVALORI	CLASSIFICAZIONE
$\alpha < 0$	REALI, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$	SELLA
$\alpha \in (0, 1/4)$	REALI, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$	NODO STABILE
$\alpha = 1/4$	REALI E $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	STELLA STABILE
$\alpha \geq 1/4$	COMPLESSI CONIUGATI CON $\text{Re } \lambda < 0$	FUOCO STABILE

$$\mathcal{J}(\pm\sqrt{-\alpha}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\alpha & -1 \end{pmatrix},$$

i cui autovalori sono

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8\alpha}}{2}.$$

Come mostra il grafico nella figura 1.17, gli autovalori sono reali solo se $\alpha \geq -1/8$. Ripetendo considerazioni analoghe a quelle precedenti e osservando che gli equilibri di cui si discute esistono solo per $\alpha < 0$, otteniamo la tabella 1.3. Nella figura 1.18 abbiamo evidenziato le orbite tipiche

Tabella 1.3. Analisi della stabilità–instabilità degli equilibri $(u_1, u_2) = (\pm\sqrt{-\alpha}, 0)$ per l'equazione (1.22)

α	AUTOVALORI	CLASSIFICAZIONE
$\alpha \leq -1/8$	COMPLESSI CONIUGATI, $\text{Re}(\lambda) < 0$	FUOCO STABILE
$\alpha \in (-1/8, 0)$	REALI, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$	NODO STABILE

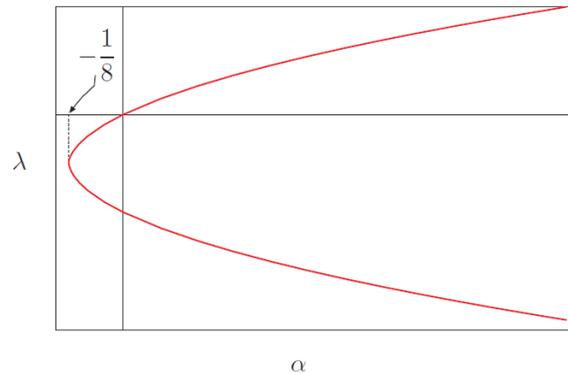


Figura 1.17. Grafico degli autovalori della matrice $\mathcal{J}(\pm\sqrt{-\alpha})$ in funzione di α per l'equazione differenziale (1.22).

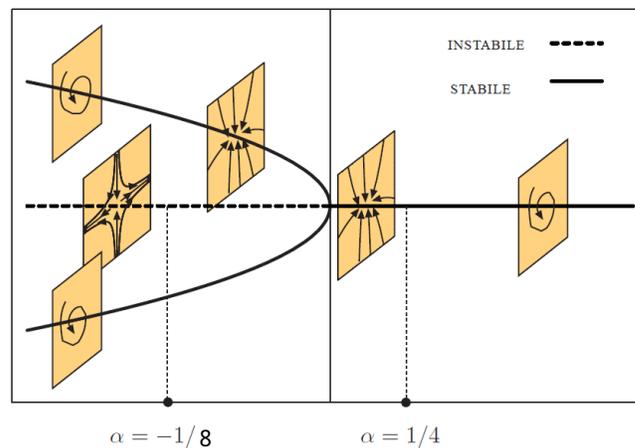


Figura 1.18. Andamento qualitativo delle orbite in prossimità dei punti di equilibrio dell'equazione (1.22): orbite che nascono da condizioni iniziali (u_1^0, u_2^0) sufficientemente prossime alle soluzioni di equilibrio possono essere fuochi, selle, nodi ecc. in funzione della tipologia e segno degli autovalori della matrice \mathcal{J} corrispondente all'equilibrio considerato. Nella figura i punti di equilibrio instabile sono in tratteggio, quelli stabili in tratto pieno. I piccoli riquadri centrati sulle curve di equilibrio sono visualizzazioni del piano delle fasi $u_1 u_2$ per α fissato.

corrispondenti a dati iniziali sufficientemente “vicini”³ ai punti di equilibrio. Il grafico ottenuto dà

³ È importante rammentare che il principio di stabilità lineare garantisce l'instabilità rispetto a perturbazioni dell'equilibrio di ampiezza arbitraria mentre la stabilità è assicurata solo rispetto a perturbazioni *sufficientemente piccole*. Le tabelle precedenti e la figura 1.18 non sono quindi completamente signi-

un'idea abbastanza chiara della natura del punto di biforcazione $(0, 0)$ nel piano αu_1 .

▲ ESEMPIO 1.12. *Studiamo infine il problema relativo al caso dell'autovalore nullo per l'equazione (1.22). Si verifica facilmente che*

$$V(u_1, u_2) = \frac{1}{2}u_2^2 + \beta \cos u_1 - \frac{1}{2}\alpha\beta \sin^2 u_1$$

è una funzione di Liapunov per il caso in esame. Lo studio dei minimi dell'energia potenziale (figura 1.19) mostra che $(u_1, \alpha) = (\pi, -1)$ è subcritico mentre $(u_1, \alpha) = (0, 1)$ è supercritico. Il diagramma di biforcazione completo è mostrato nella figura 1.20.

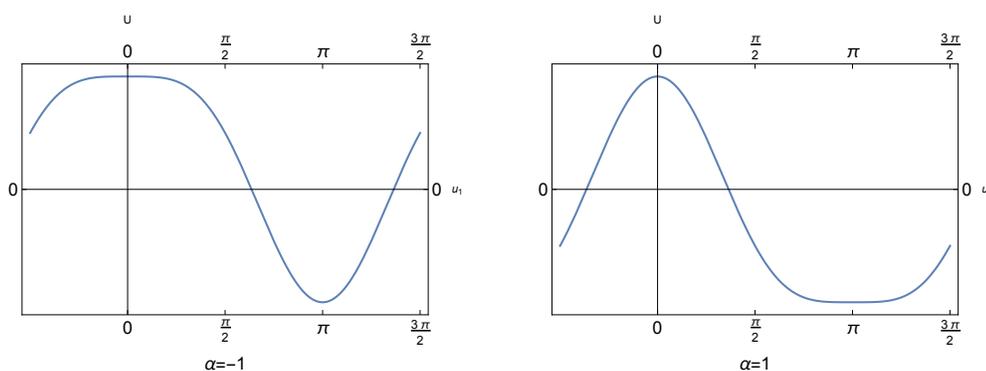


Figura 1.19. Potenziale del pendolo centrifugo per $\alpha = -1$ (a sinistra) e $\alpha = 1$ a destra.

1.7 Isteresi

Una biforcazione subcritica conduce in modo naturale al concetto di *isteresi*. È utile introdurre questo concetto attraverso un esempio (dovuto a Benjamin): consideriamo una tavola orizzontale con due fori attraverso i quali viene fatto passare un cavo metallico flessibile ed elastico (figura 1.21) e supponiamo di variare nel tempo la lunghezza del cavo. Il cavo formerà un arco al di sopra della tavola di lunghezza ℓ (da foro a foro). L'esperienza mostra che l'arco resta nel piano verticale che contiene i due fori della tavola solo se ℓ non supera un valore critico ℓ_c ; superato questo valore, il cavo non resta in un piano verticale ma si piega drasticamente in modo da restare ancora in un

fittive nel caso si considerino perturbazioni di ampiezza arbitraria; per analizzare anche questo caso occorrerebbero strumenti ulteriori quali il cosiddetto “metodo diretto di Liapunov” che esulano tuttavia dai limiti che ci siamo posti.

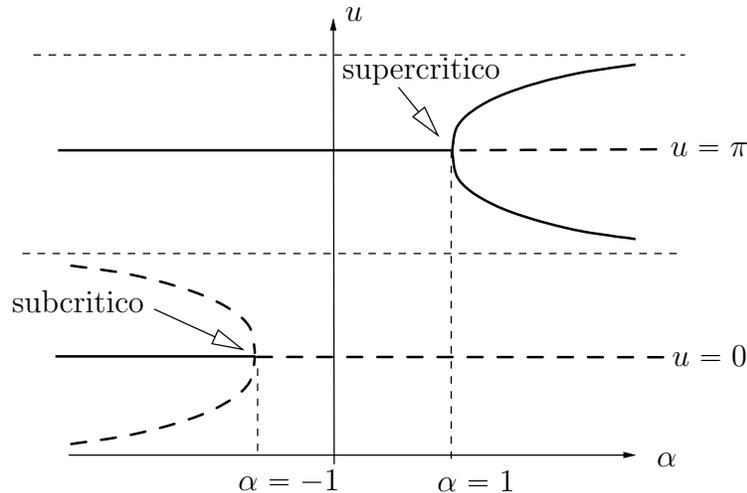


Figura 1.20. Diagramma di biforcazione del pendolo centrifugo.

piano per i due fori ma inclinato di un certo angolo ϑ_c rispetto al piano verticale. Se si *aumenta* ulteriormente la lunghezza ℓ la posizione di equilibrio cambia: il piano che contiene il cavo assumerà un'inclinazione *maggiore* che dipenderà dalla lunghezza ℓ raggiunta dal cavo. Se il sistema fisico è perfettamente simmetrico, la perdita di stabilità della configurazione verticale può avvenire in uno qualsiasi dei due piani che hanno inclinazione ϑ_c . Possiamo immaginare che l'equazione di variazione dell'angolo di inclinazione col tempo sia del tipo

$$\dot{\vartheta} = f(\vartheta, \ell). \quad (1.23)$$

Le soluzioni stazionarie si ottengono da $f(\vartheta, \ell) = 0$: una di queste soluzioni è $\vartheta = 0$ e supponiamo che tutte le altre siano della forma $\ell = \ell(\vartheta)$. La soluzione $\vartheta = 0$ è stabile solo se $0 \leq \ell \leq \ell_c$ mentre le posizioni “incline” lo sono solo se $\vartheta \geq \vartheta_c$.

Apparentemente la posizione di equilibrio $\vartheta = 0$ è l'unica possibile per $\ell \leq \ell_c$ mentre le posizioni “incline” sono in corrispondenza biunivoca con i valori $\ell > \ell_c$. Ciò tuttavia non è vero. Infatti l'esperienza mostra che *diminuendo* il valore di ℓ da un qualsiasi valore maggiore di ℓ_c ad un valore immediatamente inferiore, la soluzione stabile “inclinata” persiste fino a che ℓ non raggiunge un certo valore ℓ_o . In altre parole, eseguendo l'esperimento al contrario (accorciando il cavo invece che allungandolo), appaiono nuove posizioni di equilibrio stabili $\vartheta(\ell)$ corrispondenti all'intervallo $\ell_o \leq \ell \leq \ell_c$ e *non realizzate nella prima parte dell'esperimento*. Tenendo anche conto della simmetria fisica del sistema, il diagramma di biforcazione sarà del tipo indicato nella figura 1.22.

Proviamo a descrivere la fenomenologia legata alla variazione di ℓ seguendo il seguente schema: si fa crescere ℓ con continuità facendolo partire da un valore $\ell^* \in (\ell_o, \ell_c)$ fino a raggiungere ℓ_c (prima fase), per poi farlo decrescere fino ad ℓ_o (seconda fase) ed infine crescere nuovamente fino a ℓ^* , (terza fase). Il sistema mostra un “ciclo di isteresi” (in rosso nella figura 1.22). Mentre effettuiamo l'esperimento seguiamo l'evoluzione sul diagramma di biforcazione. Finché la lunghezza del cavo

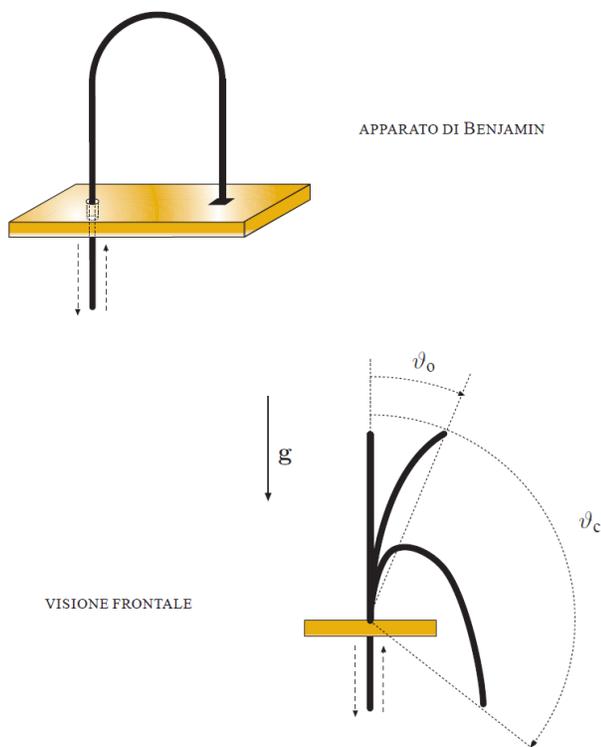


Figura 1.21. Fenomeno di isteresi nell’esperimento di Benjamin. Se la lunghezza ℓ del cavo flessibile (nella parte superiore della tavola) è minore di ℓ_c c’è una sola posizione di equilibrio ($\vartheta = 0$); se ℓ supera ℓ_c la posizione verticale è instabile e l’arco si flette a destra o a sinistra (nella visione frontale) raggiungendo istantaneamente il valore ϑ_c . Accorciando il cavo, la posizione “piegata” resta stabile anche quando ℓ diventa minore di ℓ_c restando maggiore di ℓ_o . Il valore critico dell’angolo per la posizione “piegata” quando ℓ decresce è ϑ_o (g indica la gravità).

è piccola (prima fase), il cavo resterà in verticale anche se sottoposto a perturbazioni non troppo forti. Continuiamo ad allungare il cavo fino a raggiungere il valore ℓ_c . A questo punto basta una perturbazione comunque piccola perché il piano contenente il cavo si pieghi improvvisamente da uno dei due lati (la scelta dipende dalla perturbazione che fa perdere stabilità alla soluzione $\vartheta = 0$) formando un angolo ben determinato ϑ_c con la verticale. Questo significa che si è passati attraverso il punto di biforcazione $(\ell_c, 0)$ e si è “saltati” in (ℓ_c, ϑ_c) . Se si continua ad aumentare la lunghezza del cavo si osserverà solo un incremento dell’angolo medio formato con la verticale e le soluzioni stabili si susseguono senza soluzione di continuità. Dopo essere avanzati un po’ lungo il ramo stabile $\ell(\vartheta)$ torniamo indietro diminuendo, molto lentamente, la lunghezza del cavo: l’angolo d’inclinazione del piano che lo contiene diminuirà e arrivando in (ℓ_c, ϑ_c) (cioè al valore dell’angolo ottenuto nella prima biforcazione subcritica) si noterà che *non accade nulla*. Anche continuando a diminuire la lunghezza, l’angolo decresce con regolarità fino a raggiungere un nuovo valore critico (punto (ℓ_o, ϑ_o) del diagramma) in cui il cavo “scatta” (sotto l’effetto di perturbazioni comunque piccole) in posizione verticale. È questa la seconda biforcazione. Si noterà che il valore critico ℓ_o della lunghezza nella

seconda biforcazione è *minore* di quello della prima ℓ_c . A questo punto, per chiudere il ciclo di isteresi, basta aumentare ℓ fino al valore ℓ^* in modo da raggiungere il punto $(\ell^*, 0)$; in questa fase il cavo resta stabile in posizione verticale.

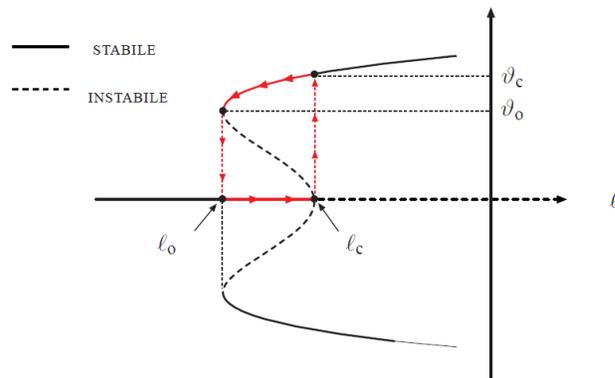


Figura 1.22. Diagramma di biforcazione associato all'esempio di Benjamin: i punti $(\ell_0, \pm\vartheta_0)$ sono punti di inversione regolari mentre $(\ell_c, 0)$ è un punto doppio d'inversione (forcella). La simmetria della curva $\ell(\vartheta)$ riflette la simmetria fisica del sistema. Per $\ell < \ell_0$, l'unica soluzione di equilibrio (stabile) è $\vartheta = 0$; se $\ell_0 < \ell < \ell_c$ vi sono tre soluzioni stabili. Infine, quando $\ell > \ell_c$, le uniche soluzioni di equilibrio stabile sono quelle "piegate". Se si fa crescere ℓ con continuità facendolo partire da un valore $\ell^* \in (\ell_0, \ell_c)$ fino a raggiungere ℓ_c (prima fase), per poi farlo decrescere fino ad ℓ_0 (seconda fase) ed infine crescere nuovamente fino a ℓ^* (terza fase), il sistema mostra un "ciclo di isteresi" (in rosso).

▲ ESEMPIO 1.13. *L'equazione*

$$\ddot{u} + \dot{u} - \alpha u - \beta u^3 + u^5 = 0,$$

con α e $\beta > 0$ numeri reali fissati, mostra il fenomeno dell'isteresi. Il relativo diagramma di biforcazione è essenzialmente identico a quello riportato nella figura 1.22: c'è un punto di biforcazione subcritico in $\alpha = \alpha_b = 0$ e due punti di inversione in $\alpha = \alpha_t = -\frac{\beta^2}{4}$ con $u_t = \pm\sqrt{\frac{\beta}{2}}$. Per $\alpha < \alpha_t$ la sola configurazione di equilibrio è $u = 0$; per $\alpha_t < \alpha < \alpha_b$ ci sono cinque soluzioni di equilibrio, due delle quali sono instabili, e per $\alpha > \alpha_b$ vi sono tre soluzioni di equilibrio di cui una instabile. Se il sistema è inizialmente in $u = 0$ con $\alpha < \alpha_t$ e si fa crescere α , non accade nulla fra α_t e α_b , ma non appena $\alpha > \alpha_b$ la soluzione $u = 0$ perde la sua stabilità e il sistema tenderà verso una delle soluzioni (anch'esse di equilibrio)

$$u_e = \pm\sqrt{\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha}}{2}}.$$

Se si continua ad aumentare α l'equilibrio u_e varierà in funzione di α spostandosi lungo il ramo stabile del diagramma. Se si diminuisce α il punto di equilibrio si sposterà verso il punto di inversione. Una ulteriore diminuzione di α obbliga il sistema a saltare verso l'unico equilibrio stabile esistente per $\alpha < \alpha_t$ cioè $u = 0$. Nella regione (α_t, α_b) si è prodotta un'isteresi.

1.8 Rottura della biforcazione e transizioni catastrofiche

Se nel problema è presente più di un parametro il quadro generale del diagramma di biforcazione è molto più complesso e la natura dei punti può cambiare drasticamente. I prossimi esempi mostrano due casi interessanti per equazioni scalari del tipo $\dot{u} = f(u, \alpha, \beta)$.

▲ ESEMPIO 1.14. Si consideri l'equazione scalare $\dot{u} = \alpha u - u^3 - \beta$. Per $\beta = 0$ si ha una biforcazione supercritica. La figura 1.23 mostra come cambia il diagramma al variare di β .

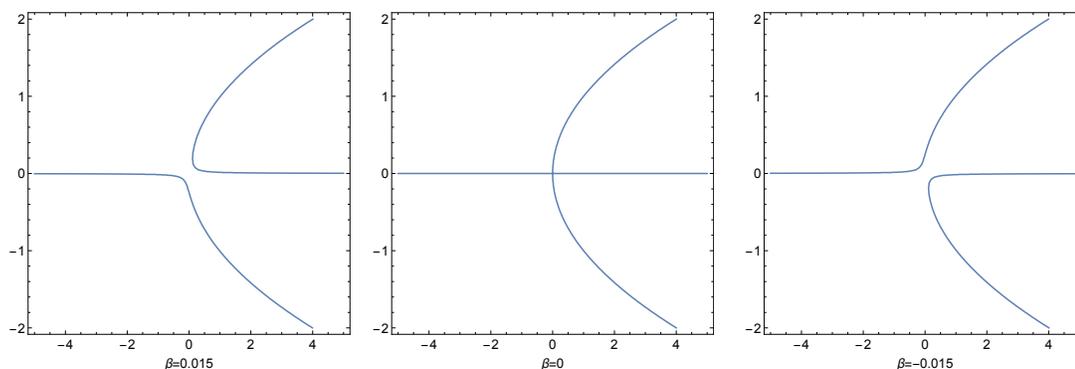


Figura 1.23. “Rottura” della biforcazione al variare di β in un intorno di $\beta = 0$ per l'equazione $u' = \alpha u - u^3 - \beta$.

▲ ESEMPIO 1.15. Si consideri l'equazione scalare $\ddot{u} = -\dot{u} + \alpha u - \beta u^3 - u^5$. Per $\beta > 0$ si ha una biforcazione supercritica che diventa subcritica se β decresce e diventa negativo. La figura 1.24 mostra come cambia il diagramma al variare di β .

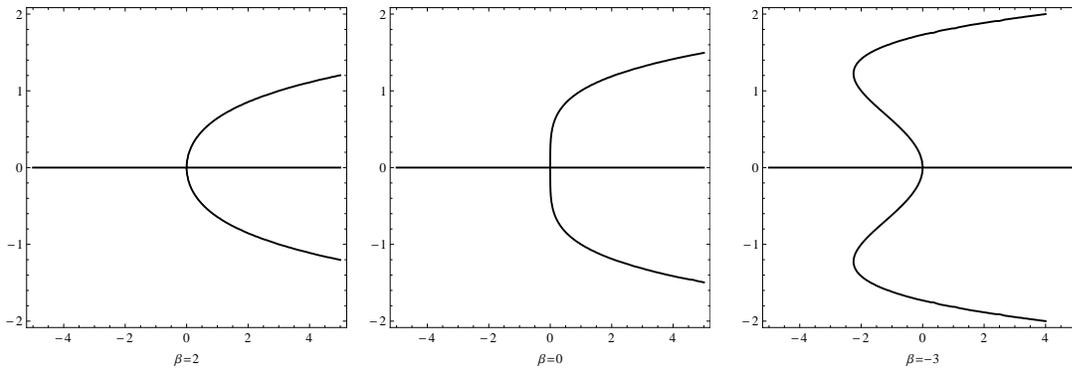


Figura 1.24. Transizione “catastrofica” della biforcazione (da supercritica a subcritica) al decrescere di β passando da valori positivi a negativi per l’equazione $\ddot{u} = -\dot{u} + \alpha u - \beta u^3 - u^5$.

 **ESERCIZIO 1.1.** – Consideriamo l’equazione

$$\dot{u} = u(9 - \alpha u)(\alpha + 2u - u^2)[(\alpha - 10)^2 + (u - 3)^2 - 1]. \quad (1.24)$$

Il ramo di iperbole (nel terzo quadrante) di equazione $\alpha = 9/u$ e la circonferenza di equazione $(\alpha - 10)^2 + (u - 3)^2 = 1$ sono soluzioni di equilibrio isolate che non danno luogo a punti di biforcazione. Nella figura 1.25 abbiamo evidenziato le soluzioni di equilibrio, i tratti stabili e instabili nonché i bacini di attrazione delle soluzioni stesse (le frecce indicano l’evoluzione temporale di soluzioni perturbate rispetto all’equilibrio). L’analisi della stabilità si può condurre utilizzando il criterio di stabilità lineare.

 **ESERCIZIO 1.2.** – Consideriamo l’equazione

$$\dot{u} = u(u + 3 + \alpha^2)(\alpha + 2u - u^2)[(\alpha + 4)^2 + (u - 3)^2 - 4]. \quad (1.25)$$

Si possono svolgere considerazioni simili a quelle del problema precedente: il relativo diagramma di biforcazione è mostrato nella figura 1.26.

1.9 Cicli limite

Nei paragrafi precedenti abbiamo studiato la stabilità dei sistemi non-lineari e visto che un’orbita “respinta” da un equilibrio instabile può tendere ad un nuovo equilibrio stabile. Vi sono –tuttavia

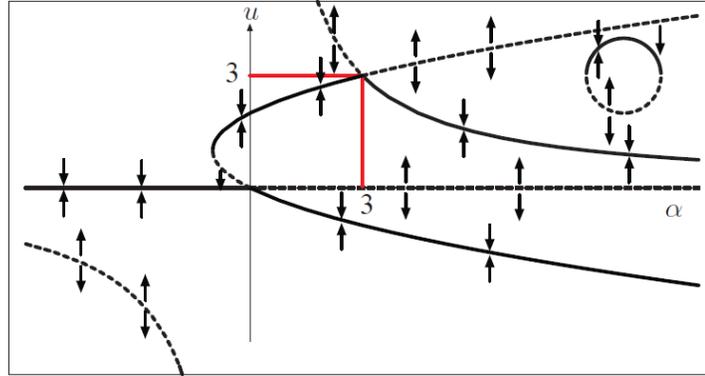


Figura 1.25. Curve di equilibrio associate all'equazione (1.24). Si notano le soluzioni isolate $(\alpha - 10)^2 + (u - 3)^2 = 1$ e $\alpha = 9/u$ (nel terzo quadrante) che non danno luogo a fenomeni di biforcazione. Le soluzioni $u = 0$ e $\alpha = u^2 - 2u$ danno luogo ad una biforcazione transcritica nell'origine; lo stesso accade per $\alpha = 9/u$ (nel primo quadrante) e $\alpha = u^2 - 2u$ nel punto $(3, 3)$.

casi in cui ciò non accade. Può accadere che la soluzione tenda – anziché ad una soluzione di equilibrio – ad una soluzione periodica, cioè ad un'orbita *chiusa* (ciclo) nello spazio delle fasi.

◇ **DEFINIZIONE 1.4** Un'orbita \mathbf{u} tende ad un'orbita chiusa γ detta ciclo limite se esiste un periodo $T > 0$ tale che la successione di punti $\{\mathbf{u}(t + nT)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tende ad un punto di γ . Un ciclo γ è asintoticamente stabile se esiste un intorno \mathcal{U}_γ di γ tale che se $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{U}_\gamma$, allora $\mathbf{u}(t, \mathbf{u}_0)$ tende a γ per $t \rightarrow +\infty$. Un ciclo è instabile se per ogni intorno \mathcal{U}_γ di γ esiste una condizione iniziale $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{U}_\gamma$ ed un \bar{t} tale che $\mathbf{u}(\bar{t}) \notin \mathcal{U}_\gamma$. Infine un ciclo limite è semi-stabile se è stabile per le orbite che hanno origine sufficientemente vicina a γ e si trovano all'esterno (oppure all'interno) della regione delimitata da γ , instabile per quelle all'interno (oppure all'esterno) di detta regione.

▲ **ESEMPIO 1.16.** Consideriamo il sistema in coordinate polari

$$\begin{cases} \dot{\varrho} = \varrho(1 - \varrho^2), \\ \dot{\vartheta} = -1. \end{cases} \quad (1.26)$$

Il sistema è ora disaccoppiato e quindi molto facile da risolvere: ϑ è una funzione linearmente decrescente del tempo, mentre l'equazione in ϱ ha due soluzioni di equilibrio: il cerchio di raggio 1 e l'origine. Le traiettorie corrispondenti a dati iniziali del tipo $\varrho(0) > 1$ hanno ϱ decrescente in funzione del tempo e tendono al cerchio di raggio 1. Se invece i dati iniziali hanno $0 < \varrho(0) < 1$, le traiettorie hanno ϱ crescente in funzione del tempo e tendono ugualmente al cerchio di raggio 1. L'origine è quindi instabile mentre tutti i punti del cerchio unitario agiscono da attrattori per le traiettorie dinamiche. Detto cerchio è un esempio di ciclo limite stabile per il sistema (1.26). Le orbite del sistema (1.26) sono esplicitamente date dalla relazione

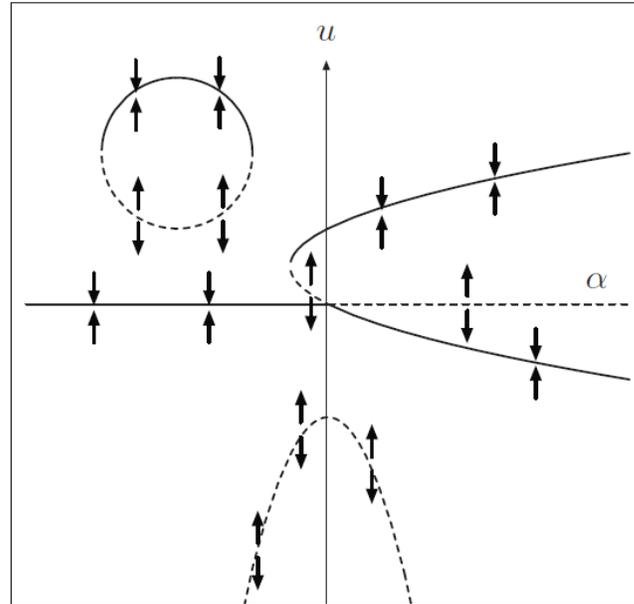


Figura 1.26. Curve di equilibrio associate all'equazione (1.25). Si notino le soluzioni isolate $(\alpha + 4)^2 + (u - 4)^2 = 4$ (nel secondo quadrante) e $u = -3 - \alpha^2$ (nel terzo e quarto quadrante) che non danno luogo a fenomeni di biforcazione. Le soluzioni $u = 0$ e $\alpha = u^2 - 2u$ danno luogo ad una biforcazione transcritica nell'origine.

$$\varrho(\vartheta) = \begin{cases} \frac{\varrho_0}{\sqrt{\varrho_0^2 - (\varrho_0^2 - 1) \exp[2(\vartheta - \vartheta_0)]}}, & \text{se } \varrho_0 > 1, \\ \frac{\varrho_0}{\sqrt{\varrho_0^2 + (1 - \varrho_0^2) \exp[2(\vartheta - \vartheta_0)]}}, & \text{se } \varrho_0 < 1, \end{cases} \quad (1.27)$$

dove (ϱ_0, ϑ_0) è il dato iniziale. Si noti che le orbite sono percorse in senso orario per $t \rightarrow +\infty$ dato che $\vartheta(t) = \vartheta_0 - t$. La figura 1.27 mostra alcune orbite e il ciclo limite $\varrho = 1$.

L'importanza dei cicli limite è essenzialmente legata al problema di come un comportamento asintotico di tipo periodico della soluzione possa svilupparsi per biforcazione da uno stato stazionario. Il problema ha senso solo se lo spazio delle fasi ha dimensione $n \geq 2$ essendo impossibile la biforcazione

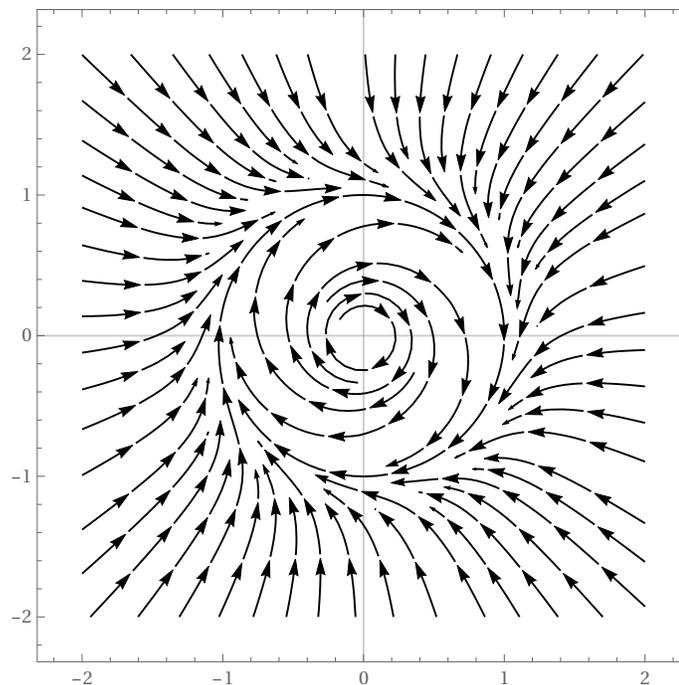


Figura 1.27. Orbite e ciclo limite associati al sistema differenziale (1.26): il ciclo è stabile mentre l'origine è instabile.

di una soluzione periodica da una stazionaria nel caso uno-dimensionale autonomo⁴.

TEOREMA 1.8. (DI POINCARÉ – BENDIXON) *Si consideri il sistema autonomo $\dot{u} = f(u)$, in \mathbb{R}^2 .*

(i) *Sia γ un'orbita che appartiene tutta ad un dominio chiuso e limitato \mathcal{D} e supponiamo che \mathcal{D} non contenga al suo interno alcun punto stazionario (equilibrio). Allora γ è un'orbita chiusa oppure tende ad un'orbita chiusa (ciclo limite) per $t \rightarrow +\infty$ oppure termina in un punto di equilibrio (sul bordo di \mathcal{D}).*

(ii) *Se $\nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial u_1} + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}$ (divergenza di f) è continua e non cambia segno in \mathcal{D} , allora non esistono cicli limite in \mathcal{D} .*

⁴ Nessuna equazione differenziale scalare autonoma del primo ordine $\dot{u} = f(u)$ ammette soluzioni periodiche. Infatti l'ipotesi di periodicità comporta che $u(t+T) = u(t)$ per qualche numero reale $T > 0$. Per il Teorema di Rolle risulterebbe $\dot{u}(\bar{t}) = 0$ per qualche $\bar{t} \in (t, t+T)$. Allora, posto $\bar{u} = u(\bar{t})$, si avrebbe $f(\bar{u}) = 0$ e quindi l'equazione ammetterebbe anche la soluzione stazionaria $u(t) = \bar{u}$; esisterebbero quindi due soluzioni del problema di Cauchy corrispondenti al dato iniziale \bar{u} , quella periodica e quella stazionaria, ciò che è impossibile.

◉ OSSERVAZIONE 1.1. – La (i) del teorema 1.8 può, equivalentemente, enunciarsi nella forma

(i)' se \mathcal{D} non contiene punti di equilibrio e se nessuna traiettoria può uscire da \mathcal{D} , allora \mathcal{D} contiene un ciclo limite.

La (ii) del teorema 1.8 è (a differenza della (i)) di facile dimostrazione: supponiamo infatti che γ sia un ciclo limite ossia un'orbita chiusa corrispondente ad una soluzione periodica e sia \mathcal{D} la regione chiusa e limitata di \mathbb{R}^2 che ha γ come frontiera. Per il Teorema di Gauss–Green (orientando γ in verso antiorario rispetto ad un osservatore posto in \mathcal{D}) possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} + \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \right) du_1 du_2 &= \int_{\gamma} f_1 du_2 - f_2 du_1 \\ &= \int_0^T \left(f_1 \frac{du_2}{dt} - f_2 \frac{du_1}{dt} \right) dt \\ &= \int_0^T \left(\frac{du_1}{dt} \frac{du_2}{dt} - \frac{du_2}{dt} \frac{du_1}{dt} \right) dt \equiv 0 \end{aligned}$$

dove T indica il periodo dell'orbita. Pertanto, se esiste un ciclo limite in \mathcal{D} , $\nabla \cdot \mathbf{f}$ non può avere segno costante in \mathcal{D} .

Un ulteriore risultato (che si potrebbe provare utilizzando, come in precedenza, la formula di Gauss–Green) è il seguente

TEOREMA 1.9. *Ogni regione chiusa e limitata di \mathbb{R}^2 la cui frontiera è un ciclo limite contiene almeno un punto di equilibrio.*

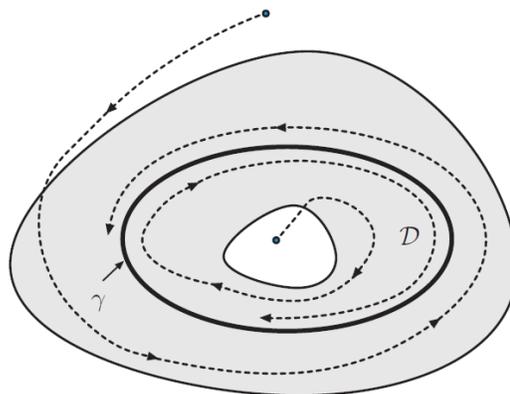


Figura 1.28. Il dominio \mathcal{D} (in grigio) non è semplicemente connesso (c'è un “buco” interno). Le orbite possono solo entrare ma non uscire da \mathcal{D} . La curva γ è un ciclo limite.

È molto facile applicare il criterio di non-esistenza (ii) mentre è evidentemente più difficile usare quello di esistenza (i) per la difficoltà di individuare un opportuno dominio \mathcal{D} .

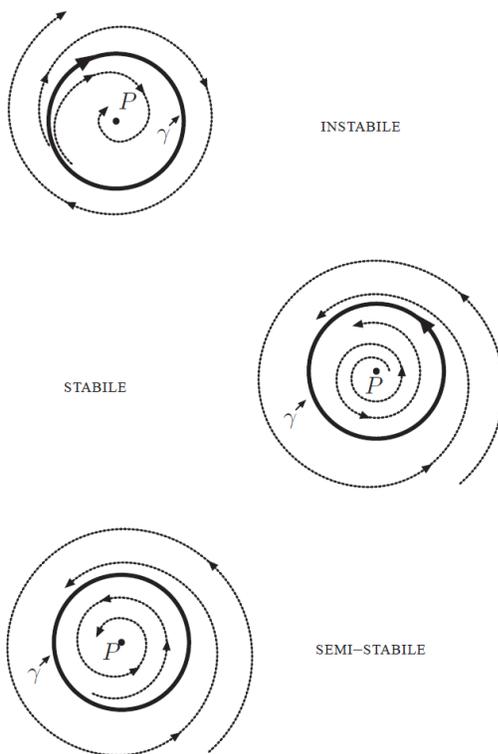


Figura 1.29. Altri esempi di cicli limite (stabile, instabile e semi-stabile): il punto P al centro è un equilibrio isolato (vedere teorema 1.9).

▲ **ESEMPIO 1.17.** Riprendiamo l'esempio 1.16; $\varrho(t) \equiv 1$ è un ciclo limite e l'origine è un equilibrio isolato nella regione delimitata dal ciclo (come prevede il teorema 1.9). Consideriamo la regione $\mathcal{D} = \{(\varrho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 \mid 1/2 \leq \varrho \leq 3/2\}$: tutte le traiettorie che nascono in \mathcal{D} e hanno $\varrho(0) \neq 1$ sono attratte dal ciclo. Infatti $\dot{\varrho}(0) > 0$ se $1/2 < \varrho(0) < 1$ e $\dot{\varrho}(0) < 0$ se $1 < \varrho(0) < 3/2$. Poiché $\dot{\varrho}$ è positiva per $0 < \varrho < 1$ e negativa se $\varrho > 1$ e nessuna orbita non-periodica può intersecare il ciclo, la regione \mathcal{D} “intrappola” tutte le orbite che nascono dentro di essa. La regione \mathcal{D} è una delle possibili regioni per cui vale la (i) del teorema 1.8. In questo caso il ciclo limite è asintoticamente stabile.

Il Teorema di Poincaré–Bendixon è strettamente 2-dimensionale. Ciò è abbastanza intuitivo se si pensa che le orbite non possono intersecarsi: quindi se le orbite entrano ma non escono da \mathcal{D} deve

esistere una qualche curva γ che “separa” le traiettorie come mostrato nella figura 1.28.

1.10 Biforcazione di Hopf

Supponiamo ora che f dipenda un parametro α e supponiamo che esista un equilibrio u_e stabile per $\alpha < \alpha_b$, instabile altrimenti. Potrebbe accadere che per $\alpha > \alpha_b$ la soluzione tenda ad un’orbita periodica. In tal caso il sistema sperimenta una biforcazione nella quale le traiettorie non sono spiralmemente attratte da un nuovo punto di equilibrio stabile ma tendono ad un ciclo limite. Questo fenomeno si chiama *biforcazione di Hopf*. Una condizione sufficiente per questo tipo di biforcazione – come mostra il teorema che segue – è l’esistenza, per la matrice Jacobiana di f calcolata in un punto di equilibrio, di autovalori puramente immaginari che “attraversano l’asse immaginario con velocità non nulla”:

TEOREMA 1.10. (DI HOPF) *Sia $u_e(\alpha) \in \mathbb{R}^n$ una soluzione di equilibrio asintoticamente stabile per $\alpha < \alpha_b$ e instabile per $\alpha > \alpha_b$; se nel punto $\alpha = \alpha_b$ la matrice Jacobiana \mathcal{J} di f ha una ed una sola coppia di autovalori semplici puramente immaginari, cioè*

$$\operatorname{Re}(\lambda_{|\alpha=\alpha_b}) = 0 \quad e \quad \operatorname{Im}(\lambda_{|\alpha=\alpha_b}) \neq 0,$$

e se inoltre

$$v = \left[\frac{d}{d\alpha} \operatorname{Re}(\lambda) \right]_{\alpha=\alpha_b} \neq 0, \quad (1.28)$$

allora, $(u_e(\alpha_b), \alpha_b)$ è un punto di biforcazione e per α sufficientemente prossimo a α_b , esiste un ciclo limite con periodo iniziale $T = \frac{2\pi}{\operatorname{Im}(\lambda_{|\alpha=\alpha_b})}$. Infine, se $u(\alpha_b)$ è localmente asintoticamente stabile, allora il ciclo limite è stabile.

▲ ESEMPIO 1.18. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \alpha u_1 - u_2 - u_1(u_1^2 + u_2^2), \\ \dot{u}_2 = \alpha u_2 + u_1 - u_2(u_1^2 + u_2^2). \end{cases} \quad (1.29)$$

Questo sistema ha un equilibrio in $(0, 0)$ per tutti i valori di α e la Jacobiana di (1.29) valutata nell’origine è

$$\mathcal{J}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix},$$

i cui autovalori sono

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \alpha \pm i.$$

Il sistema (1.29) si può riscrivere in forma complessa mediante $z = u_1 + iu_2$:

$$\dot{z} = (\alpha + i)z - z|z|^2.$$

Posto ora $z = \rho e^{i\vartheta}$ abbiamo infine il sistema in coordinate polari

$$\dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^2), \quad \dot{\vartheta} = 1. \quad (1.30)$$

del tutto simile a quello considerato nell'esempio 1.16. La prima equazione ha sempre l'equilibrio $\rho = 0$ e, se $\alpha > 0$, un secondo equilibrio $\rho = \sqrt{\alpha}$. L'analisi lineare mostra che $\rho = 0$ è asintoticamente stabile se $\alpha < 0$ e instabile se $\alpha > 0$. Se $\alpha = 0$ non si può analizzare la stabilità di $\rho = 0$ col principio di linearizzazione; tuttavia l'equilibrio $\rho = 0$ di $\dot{\rho} = -\rho^2$ è banalmente asintoticamente stabile. Per $\alpha > 0$ l'equilibrio $\rho = \sqrt{\alpha}$ rappresenta una orbita chiusa (ciclo limite) percorsa in senso antiorario a velocità costante. Il diagramma di biforcazione ha l'aspetto mostrato nella figura 1.30.

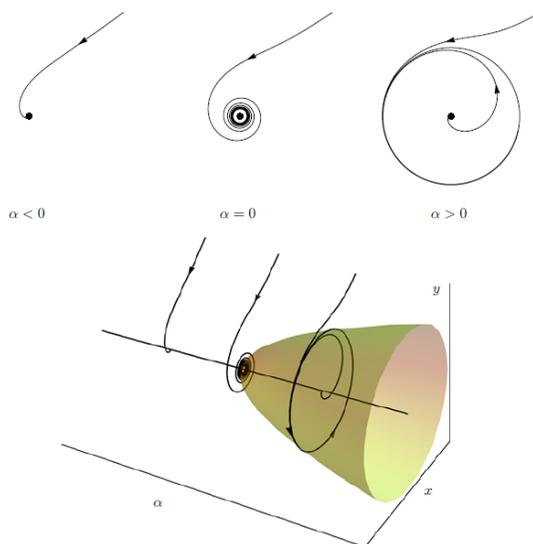


Figura 1.30. Biforcazione di Hopf *supercritica*. In questo caso $v > 0$ e il punto $P = (0, 0, 0)$ è un punto di biforcazione: l'asse $u_1 = u_2 = 0$ è asintoticamente stabile se $\alpha < 0$, instabile se $\alpha > 0$. Quando α supera il valore critico nasce un ciclo limite (uno per ogni valore di $\alpha > 0$, il paraboloido ne è il loro involucro). Tutte le orbite del piano delle fasi che nascono vicino al ciclo limite tendono ad esso: il ciclo è asintoticamente stabile.

▲ ESEMPIO 1.19. *Il sistema*

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \alpha u_1 - u_2 + u_1(u_1^2 + u_2^2), \\ \dot{u}_2 = \alpha u_2 + u_1 + u_2(u_1^2 + u_2^2). \end{cases} \quad (1.31)$$

può essere studiato in modo del tutto analogo all'esempio precedente. Si ha ancora una biforcazione di Hopf per $\alpha = 0$ con la differenza che ora per $\alpha < 0$ il ciclo limite è instabile. Per $\alpha > 0$ non c'è alcun ciclo limite e $\varrho = 0$ è globalmente asintoticamente stabile. Si noti anche che l'equilibrio $\varrho = 0$ (a differenza del caso precedente) è instabile.

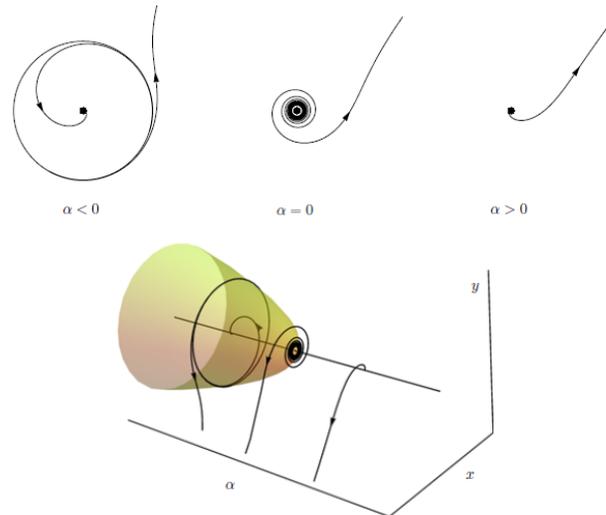


Figura 1.31. Biforcazione di Hopf *subcritica*. È ancora $v > 0$ e il punto $P = (0, 0, 0)$ è come nella figura 1.30 un punto di biforcazione: l'asse $u_1 = u_2 = 0$ è asintoticamente stabile se $\alpha < 0$, instabile se $\alpha > 0$. Quando α decresce al di sotto del valore critico nasce un ciclo limite instabile (uno per ogni valore di $\alpha < 0$, il paraboloido ne è il loro inviluppo). Tutte le orbite del piano delle fasi che nascono vicino al ciclo limite si allontanano da esso: quelle che nascono all'interno della regione delimitata dal ciclo tendono alla soluzione stabile $u_1 = u_2 = 0$.

La biforcazione mostrata nella figura 1.30 è “supercritica”: un ciclo limite stabile si forma “dopo” la biforcazione (cioè per valori positivi del parametro). Per contro la biforcazione mostrata nella figura 1.31 è “subcritica”. Nel primo caso l'unico equilibrio stabile viene sostituito da un unico ciclo limite stabile di piccola ampiezza $\varrho = \sqrt{\alpha}$ e il sistema rimane in un intorno di $\varrho = 0$ (si ha quindi uno scambio di stabilità “non catastrofico”). Nel secondo caso il bacino di attrazione di $\varrho = 0$ è limitato dal ciclo limite instabile per $\alpha < 0$ e appena α diventa positivo il sistema abbandona qualsiasi intorno dell'origine (la perdita di stabilità dell'origine è quindi “catastrofica”).

Notevoli esempi di cicli limite e di biforcazioni di Hopf si hanno in modelli matematici di mercati finanziari, crescita economica, e di dinamica delle popolazioni ma anche nello studio della dinamica dei fluidi: nelle Scienze della Terra esempi particolarmente interessanti si incontrano nei modelli proposti per la dinamica del mantello, del paleomagnetismo e dell'evoluzione climatica e paleoclimatica.

Libri

Jones, Frederic J. *The Structure of Petrarch's Canzoniere*. Boydell & Brewer, Cambridge, UK, 1995.

Articoli

- Rinaldi, Sergio, Fabio Della Rossa, Fabio Dercole, Alessandra Gagnani e Pietro Landi. «Roxane and Cyrano». In: *Modeling Love Dynamics*. 2016, pagine 43–53.
- Dercole, Fabio e Sergio Rinaldi. «Love stories can be unpredictable: Jules et Jim in the vortex of life». In: *AIP: Chaos, An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 24 (2014).
- Rinaldi, Sergio, Fabio Della Rossa e Pietro Landi. «A mathematical model of “Pride and Prejudice”». In: *Nonlinear dynamics, psychology, and life sciences* 18.2 (2014), pagine 199–211.
- «A mathematical model of “Gone with the Wind”». In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 392.15 (2013), pagine 3231–3239.
- Rinaldi, Sergio, Pietro Landi e Fabio Della Rossa. «Small discoveries can have great consequences in love affairs: the case of Beauty and the Beast». In: *International Journal of Bifurcation and Chaos* 23.11 (2013), pagina 1330038.
- Rinaldi, Sergio. «Laura and Petrarch: An Intriguing Case of Cyclical Love Dynamics». In: *SIAM J. Appl. Math.* 58.4 (1998), pagine 1205–1221. ISSN: 0036-1399.
- Strogatz, Steven H. «Love affairs and differential equations». In: *Mathematics Magazine* 61.1 (1988), pagina 35.
- Levinger, G. «Toward the Analysis of Close Relationships». In: *Journal of Experimental Social Psychology* 16 (1980), pagine 510–544.
- Zeeman, E. C. «Catastrophe Theory». In: *Proc. of the Royal Institution of Great Britain* 49 (1976), pagine 77–92.

Libri

- Ghil, Michael e Stephen Childress. *Topics in geophysical fluid dynamics: atmospheric dynamics, dynamo theory, and climate dynamics*. Volume 60. Springer Science & Business Media, 1987.
- Weertman, J. *Rate of Growth Or Shrinkage of Nonequilibrium Ice Sheets*. Research report - Cold Regions Research and Engineering Laboratory. U.S. Army Materiel Command, Cold Regions Research & Engineering Laboratory, 1964.

Libri

- Coirier, J. *Mécanique des milieux continus*. Paris: Dunod, 1997.
- Coussy, O. *Mechanics of porous continua*. John Wiley Sons, 1995.
- Rajagopal, K. R. e L. Tao. *Mechanics of Mixtures*. World Scientific, Singapore, 1995.
- Bear, J. e A. Verruijt. *Modelling Groundwater Flow and Pollution, Theory and Applications of Transport in Porous Media*. Volume 1. Dordrecht: Kluwer, 1987.
- Kaye, W. C. e T. H. Laby. *Tables of Physical and Chemical Constants*. London: Longman, 1973.
- Darcy, H. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon : exposition et application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions de distribution d'eau*. Paris: Victor Dalmont, 1856.

Articoli

- Pruess, K. «Mathematical Modeling of Fluid Flow and Heat Transfer in Geothermal Systems – An introduction in five lectures». In: *Geothermal training programme Reports*. A cura di The United Nations University. 3. Reykjavik, Iceland, 2002, pagine 6–9.
- Barbier, E., curatore. *Proceedings of the World Geothermal Congress*. International Geothermal Association. Florence, Italy: Elsevier Science, 1995, pagine 18–31.
- Faust, C. R. e J. W. Mercer. «Geothermal reservoir simulation: 1. Mathematical models for liquid- and vapor-dominated hydrothermal systems». In: *Water Resour. Res.* 14 (1978).

Libri

Bary, N. K. *Treatise on trigonometric series*. Volume I. Pergamon Press, 1964.

Articoli

Calusi, B. «Analisi qualitativa di un modello per la dinamica di valanghe». Tesi Magistrale. Università degli studi di Firenze Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali Corso di Laurea in Matematica, 2014.

Bovet, E., B. Chiaia e L. Preziosi. *Test of different rheological models for snow avalanche flow dynamics*. Rapporto tecnico. Politecnico di Torino, 2012.

Questa pagina è intenzionalmente bianca.

Indice analitico

bacino di attrazione, 5

biforcazione

diagrammi di, 13

subcritica, 20

supercritica, 20

transcritica, 20

ciclo, 4

limite, 30

criterio

di stabilità lineare, 7

equazione

di Van der Pol, 10

equazione differenziale

soluzione periodica di una, 4

equilibrio

instabile, 5

stabile, 5

asintoticamente, 5

funzione

di Liapunov, 9

isteresi, 24

Jordan

forma canonica di, 8

pendolo

centrifugo, 16

perturbazioni infinitesime, 6

punto

di biforcazione, 14

di diramazione, 13

stabilità

asintotica

condizionata, 5

incondizionata, 5

lineare

criterio di, 7

marginale, 7

teorema

di scambio di stabilità (I), 19

di scambio di stabilità (II), 19