

Richiami su sistemi "dinamici" definiti tramite ODE

①

Qualche definizione utile:

1. Si dice stato, all'istante t , di un sistema fisico un vettore

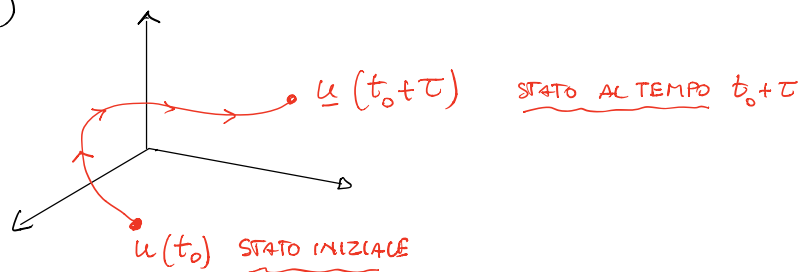
$$\underline{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

dove t è il tempo e $u_i(t)$ sono n variabili "di stato" che descrivono completamente il sistema al tempo t

Esempio 1. In un gas ideale le variabili di stato possono essere identificate con volume, temperatura e pressione

Esempio 2. Per un corpo rigido libero le variabili di stato sono le 6 coordinate Lagrangiane ossia le 3 coordinate del baricentro e i 3 angoli di Eulero

2. Spazio delle fasi: l'evoluzione del sistema si rappresenta con una traiettoria (curva) in \mathbb{R}^n (se t varia su un insieme continuo di valori)



(t può variare in generale anche su un insieme discreto di valori
ma non ce ne occupiamo)

I sistemi dinamici n -dimensionali sono generalmente soluzioni di ODE del tipo (o riconducibili)

$$\underline{\dot{u}} = \underline{F}(\underline{u}) \quad (1)$$

Nella (1) il valore $\underline{u}(t)$ dipende dal valore attuale di u , cioè $\underline{u}(t)$. Tuttavia sono possibili situazioni più complicate come

$$\dot{\underline{u}} = \int_0^t F(\underline{u}(s)) ds \quad (2)$$

in cui il valore attuale di \underline{u} dipende dalla "storia" di u sull'intero intervallo $(0, t)$ tramite un "nucleo" F assegnato.

OSSERVAZIONE: ovviamente sono possibili anche sistemi dinamici più complicati come quelli associati ad eq. differenziali a derivate parziali (PDE). In questo caso la soluzione u è funzione anche di variabili spaziali oltre che del tempo e lo spazio delle fasi non è più finito-dimensionale. Per semplicità, quando ci occuperemo di PDE non faremo riferimento allo spazio delle fasi per analizzare il modello.

3. Esistenza e unicità: nei casi di nostro interesse la funzione $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è supposta Lipschitziana con cui il problema di Cauchy ha sempre un'unica soluzione locale e le traiettorie non si intersecano mai nella regione di esistenza. Sistemi di questo tipo sono detti deterministici. Tuttavia sono possibili evoluzioni verso regimi caotici per particolari sistemi non lineari.

4. Sistemi LINEARI e NON LINEARI: se F è una matrice $n \times n$ il sistema è lineare e vale il principio di sovrapposizione.

(cioè se $\underline{u}_1(t)$ e $\underline{u}_2(t)$ sono soluzioni e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ allora anche $\alpha \underline{u}_1(t) + \beta \underline{u}_2(t)$ è soluzione). ③

Nei sistemi lineari la soluzione è sempre globale nel tempo

5. Soluzioni stazionarie: sono le soluzioni dell'eq. $\underline{F}(\underline{u})=0$

Se $\underline{u}_e \in \mathbb{R}^m$ è una di tali soluzioni (detta equilibrio)

$$(3) \quad \dot{\underline{u}}(t) = \underline{F}(\underline{u}_e(t)) = 0 \Rightarrow \underline{u}(t) = \underline{u}_e \quad \forall t$$

ed è l'unica soluzione del P. d. C.

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{\underline{u}} = \underline{F}(\underline{u}) \\ \underline{u}(0) = \underline{u}_e \end{cases}$$

6. Equilibri stabili e instabili: la distinzione è importante perché solo quelli stabili sono "osservabili". Sia $\underline{u}_0 = \underline{u}(0)$ dato iniziale

(a) \underline{u}_e è stabile se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $|\underline{u}_0 - \underline{u}_e| < \delta_\varepsilon$ allora

$$|\underline{u}(t) - \underline{u}_e| < \varepsilon \quad \forall t > \bar{T}_\varepsilon \quad \text{con } \bar{T}_\varepsilon \text{ opportuno}$$

(b) \underline{u}_e è instabile se non è stabile

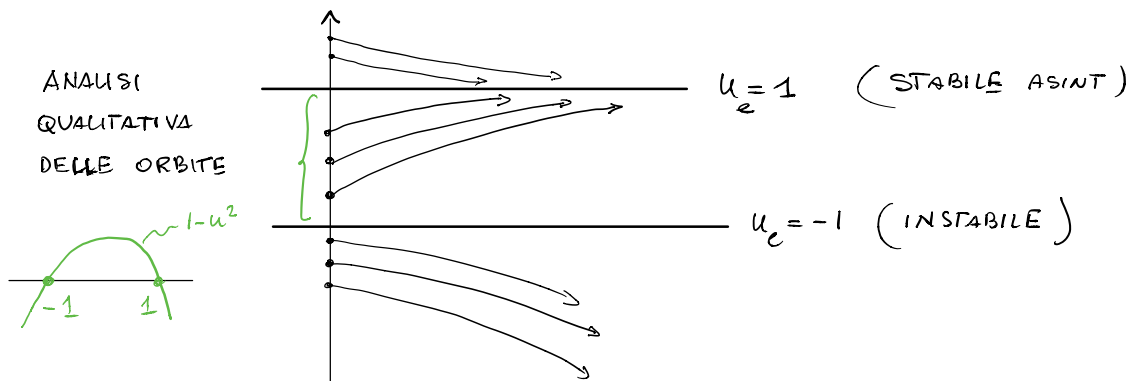
(c) \underline{u}_e è asintoticamente stabile se

$$\exists \gamma > 0 \text{ t.c. } |\underline{u}_0 - \underline{u}_e| < \gamma \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} |\underline{u}(t) - \underline{u}_e| = 0$$

L'insieme dei vettori $\underline{u}_0 \in \mathbb{R}^m$ per cui \underline{u}_e è asintoticamente stabile è il suo bacino di attrazione $B(\underline{u}_e)$

[N.B.: ogni eq. asintotic. stabile ha il suo bacino di attrazione]

Esempio: $\dot{u} = 1 - u^2$, $u_e = \pm 1$ sono i soli equilibri ④
 Si noti che $\dot{u} > 0$ se $|u| < 1$ e $\dot{u} < 0$ in caso contrario.
 preso un d.i. $u_0 \in (-1, 1)$ oppure $u_0 > 1$ la corrispondente
 soluzione tende asintoticamente a $u_e = 1$ (che quindi è
 stabile e $(-1, 1) \cup (1, +\infty) = B(1)$



Nel caso dell'esempio la stabilità asintotica di $u_e = 1$ è
CONDIZIONATA. Si dice incondizionata solo nel caso in cui
 $B(u_e) = \mathbb{R}^n$ (è quanto si verifica nel caso $\dot{u} = -u^2$ dove
 $u_e = 0$ è incondizionatamente asintoticamente stabile)

7. Principio di linearizzazione: costituisce uno strumento fondamentale
 per lo studio dei casi non lineari. Sia \underline{u}_e un equilibrio di
 $\dot{\underline{u}} = \underline{F}(\underline{u})$. Allora

$$\begin{aligned}
 \underline{F}(\underline{u}) &= \underline{F}(\underline{u}_e) + D\underline{F}(\underline{u}_e)(\underline{u} - \underline{u}_e) + o(\|\underline{u} - \underline{u}_e\|) \\
 (5) \quad &\cong J(\underline{u}_e)(\underline{u} - \underline{u}_e)
 \end{aligned}$$

dove $J(\underline{u}_e)$ è costante, di dimensione $n \times n$.

5

Siano λ_i $i=1, \dots, n$ gli autovalori di $J(\underline{u}_e)$: allora

(a) $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall i \Rightarrow \underline{u}_e$ CONDIZ. ASINT. STAB.

(b) $\exists \hat{i}$ t.c. $\operatorname{Re}(\lambda_{\hat{i}}) > 0 \Rightarrow \underline{u}_e$ è INSTABILE

N.B.: il Teorema non è conclusivo nel caso in cui $\exists \hat{i}$ t.c.

$\operatorname{Re}(\lambda_{\hat{i}}) = 0$ e $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall i \neq \hat{i}$. Infatti, sono possibili vari tipi di comportamenti e l'esame va fatto caso per caso.

8. Sistemi conservativi: il sistema $\dot{\underline{u}} = \underline{F}(\underline{u})$ si dice tale se

$\exists \mathcal{E}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\forall \underline{u}(t)$ soluzione del sistema si ha

$$\mathcal{E}(\underline{u}(t)) = \text{costante} \quad (6)$$

In tal caso l'evoluzione delle soluzioni avviene su una varietà $(m-1)$ -dimensionale di \mathbb{R}^m definita dalla (6).

9. Conservazione di volume: sia B_0 un generico sottoinsieme di \mathbb{R}^m e consideriamo i punti di B_0 come dati iniziali.

Le soluzioni di $\dot{\underline{u}} = \underline{F}(\underline{u})$ che assumono come dati iniziali

i punti di B_0 danno luogo al trasformato di B al tempo t

definito come $\{ \underline{w} \in \mathbb{R}^m \mid \underline{w} = \underline{u}(t, \underline{u}_0) \text{ con } \underline{u}_0 \in B_0 \} \equiv B(t)$

La funzione $\underline{w} = \underline{u}(t, \underline{u}_0)$ può essere vista come un cambiamento di variabili in \mathbb{R}^m del tipo

$$w: \underline{u}_0 \in B_0 \longrightarrow \underline{u} \in B_t$$

in cui t è visto come un parametro. Allora

6
vol $B_t = \int_{B_t} d\underline{u}$ (dove $d\underline{u} = du_1 du_2 \dots du_m$). Studiamo

$\frac{d}{dt}$ vol B_t : per il cambiamento di variabili \underline{w}

$$\int_{B_t} d\underline{u} = \int_{B_0} |d_t J| d\underline{u}_0$$

dove $J = \left(\frac{\partial u_i}{\partial u_{0j}} \right)$ che supponiamo invertibile $\forall t$

(altrimenti la mappa $\underline{u}_0 \rightarrow \underline{u}(t, \underline{u}_0)$ non è invertibile
cioè che corrisponderebbe ad una violazione dell'unicità)

Allora

$$\frac{d}{dt} \text{vol } B_t = \int_{B_0} \frac{\partial}{\partial t} (|\det J|) d\underline{u}_0$$

Il simbolo di valore assoluto può essere tolto: infatti

$\det J$ è funzione continua di t e $J|_{t=0} = \mathbb{I}$

(matrice identica perché $\underline{u}(0, \underline{u}_0) = \underline{u}_0$). Quindi

$\det(J|_{t=0}) = 1$ e per la continuità $\det J \neq 0 \forall t$.

Osserviamo anche che se \underline{w}^{-1} è l'inversa $\underline{u}_0 \xrightarrow{\underline{w}} \underline{u}$ di \underline{w}
allora $j(t, \underline{u}) = J[t, \underline{u}_0(t, \underline{u})]$ è la jacobiana di
 \underline{w}^{-1} . Si può allora provare la relazione (vedi CAPI miei
appunti di fisica matematica a pag 15 disponibili su
piattoforma Moodle, corso di Ist. Fis. MAT. 2018-19)

$$\frac{\partial}{\partial t} J(t, \underline{u}_0) = J(t, \underline{u}_0) \left[\nabla_{\underline{u}} \cdot \underline{F}(\underline{u}) \right]_{\underline{u} = \underline{w}(t, \underline{u}_0)} \quad \left(\begin{array}{c} \text{FORMULA DI} \\ \text{EULERO} \end{array} \right) \quad (7)$$

Pertanto

$$\frac{d}{dt} \text{vol } B_t = \int_{B_0} J(t, \underline{u}_0) \left[\nabla_{\underline{u}} \cdot \underline{F}(\underline{u}) \right]_{\underline{u} = \underline{w}(t, \underline{u}_0)} d\underline{u}_0$$

Pertanto $\nabla_{\underline{u}} \cdot \underline{F} = 0$ implica $\text{vol } B_t = \text{vol } B_0 \quad \forall t$

Esempio 1. Un sistema dinamico in 2 dimensioni del tipo

$$\dot{\underline{u}} = \underline{F}(\underline{u}) \quad \text{con} \quad \underline{F}(\underline{u}) = (u_2, u_1) \quad \text{conserva il volume}$$

perché

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{e quindi} \quad \text{div } \underline{F} = \frac{\partial F_1}{\partial u_1} + \frac{\partial F_2}{\partial u_2} = 0$$

Esempio 2. L'esempio precedente si generalizza facilmente.

Se $F_i = f_i(u_j)$ con $j \neq i$ allora

$$J = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

comunque siano fatte le funzioni f_i .

10. Sistemi dissipativi : si dicono tali quelli per i quali

(8)

$$\operatorname{div} \underline{F} < 0$$

In questo caso il volume iniziale B_0 può contrarsi fino a degenerare con volume nullo in un tempo infinito.

L'insieme $B_\infty \wedge$ (se esiste) ha dimensione $\tilde{m} < n$ e si dice attrattore del sistema dinamico.

11. Un insieme si dice invariante per il sistema dinamico se è trasformato in se stesso dal flusso, cioè

$$A \xrightarrow{t} A$$

Esempio : le orbite chiuse di un sistema con soluzioni

periodiche come $\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \Leftrightarrow (u = w_1, \dot{u} = w_2)$

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = w_2 \\ \dot{w}_2 = -\omega^2 w_1 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{\dot{w}} = \underline{F}(w) \quad \text{con} \quad \underline{F} = (w_2, -\omega^2 w_1)$$

11. Insieme attrattore : un insieme invariante A è un attrattore se esiste un insieme B di misura non nulla tale che $A \subset B$ e $B \xrightarrow{t} A$.

B è detto bacino di attrazione.

Esempio : $\dot{u} = 1 - u^2$. Gli insiemi $\{u = 1\}$ e $\{u = -1\}$ sono invarianti, ma solo il primo è un attrattore e il suo bacino di attrazione è $B = (-1, +\infty)$

I sistemi dinamici mostrano vari tipi di attrattori: punti ⁹
 fissi, cicli limite, attrattori "strani".

12. SISTEMI LINEARI: $\dot{\underline{u}} = A \underline{u}$ A matrice costante
 $n \times n$; $\underline{u}_e = \underline{0}$ è l'unico equilibrio (isolato) se A è
invertibile. Ci si può sempre ricondurre a questo caso: se
 il sistema ha la forma $\dot{\underline{u}} = A \underline{u} + \underline{u}^*$ e A è invertibile
 $A \underline{u} + \underline{u}^* = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{u}_e = -A^{-1} \underline{u}^*$ è l'unico equilibrio e
 posto $\underline{w} = \underline{u} - \underline{u}_e$ il sistema si scrive $\dot{\underline{w}} = A (\underline{u} - \underline{u}_e) = A \underline{w}$
 che ha $\underline{w} = \underline{0}$ come eq. isolato.

Gli autovalori di A sono invarianti per trasformazioni di
 similitudine cioè sono identici per tutte le matrici del
 tipo

$$\tilde{A} = M^{-1} A M \quad \text{con } M \text{ invertibile}$$

Sapete se λ è autovalore di A allora $A \underline{u} = \lambda \underline{u} \Leftrightarrow$

$$A (M M^{-1}) \underline{u} = \lambda \underline{u} = \lambda M M^{-1} \underline{u} \Leftrightarrow$$

$$(A M) (M^{-1} \underline{u}) = \lambda M M^{-1} \underline{u} \Leftrightarrow$$

$$(M^{-1} A M) (M^{-1} \underline{u}) = \lambda (M^{-1} \underline{u}) \Leftrightarrow$$

$$\tilde{A} \tilde{u} = \lambda \tilde{u}$$

e $\tilde{u} = M^{-1} \underline{u}$ è autovettore di \tilde{A}

Caso semplice: $n=2$

Ci sono solo 4 classi distinte di similitudine esse, e
 meno di una trasformazione di similitudine, A può avere
 solo una delle seguenti forme canoniche (dette di JORDAN)

$$(a) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

o $\lambda_1 \neq \lambda_2$ reali

$$(b) \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

o λ_0 reale e moltep.
 algebrica = mult. geometrica = 2

$$(c) \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

o λ_0 reale ma la
 moltep. geometrica (1) è minore
 di quella algebrica (2)

$$(d) \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$\lambda = \alpha \pm i\beta$
 (complessi coniugati)

La matrice di similitudine M deforma le orbite
 nello spazio delle fasi ma non altera l'aspetto qualitativo
 poiché gli autovalori non cambiano e sono proprio gli
 autovalori che determinano il carattere stabile/instabile
 delle soluzioni del sistema lineare

(4)

N.B. Se $\det A = 0$ (almeno un autovalore è nullo) la matrice di Jordan può assumere solo una delle seguenti forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

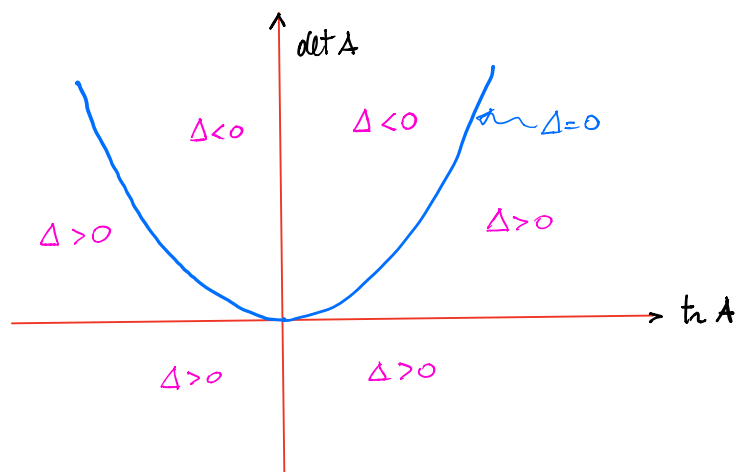
13. CLASSIFICAZIONE degli equilibri isolati. Sia A 2×2 una forma canonica di Jordan e

$$\lambda^2 - \text{tr} A \lambda + \det A = 0$$

l'eq. caratteristica. Allora $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} (\text{tr} A \pm \sqrt{\Delta})$ dove

$$\Delta = (\text{tr} A)^2 - 4 \det A$$

e $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det A$, $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr} A$. Allora



A seconda del valore assunto dalla coppia (λ_+, λ_-) si hanno quattro casi:

(a) $\underline{u}(t) = (c_1 e^{\lambda_+ t}, c_2 e^{\lambda_- t}) \Leftrightarrow u_2 = c_2 \left(\frac{u_1}{c_1} \right)^{\lambda_- / \lambda_+}$
 (curve potenza)

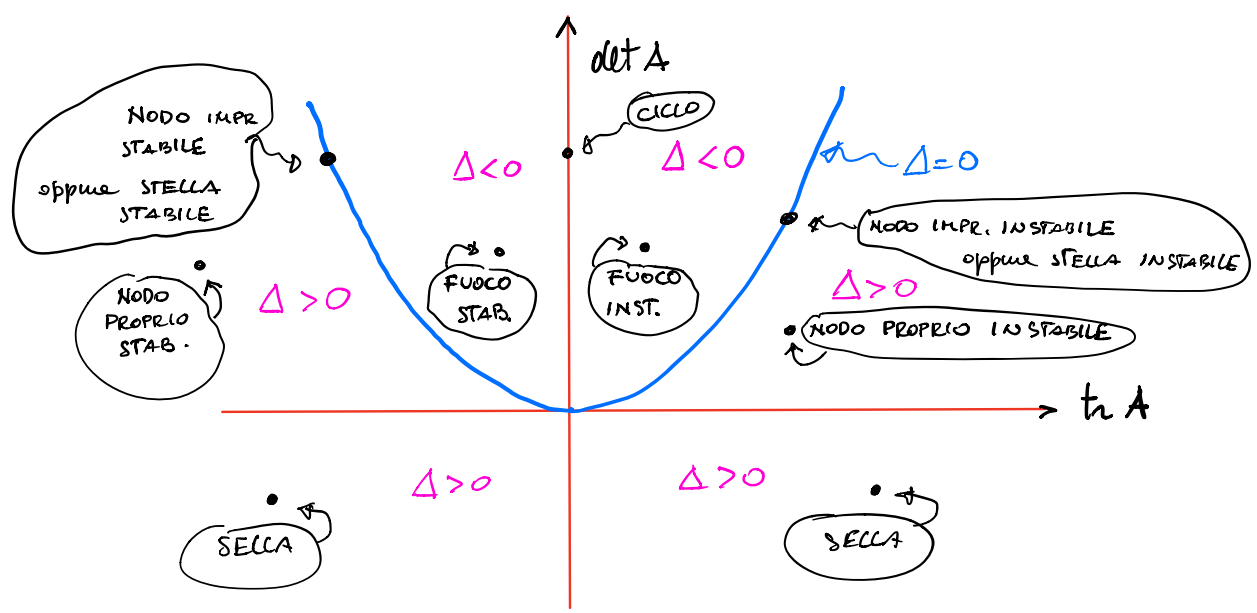
(b) $\underline{u}(t) = (c_1, c_2) e^{\lambda_0 t} \Leftrightarrow u_2 = \frac{c_2}{c_1} u_1$ (rette)

(c) $\underline{u}(t) = (c_1 e^{\lambda_0 t} + c_2 t e^{\lambda_0 t}, c_2 e^{\lambda_0 t})$ (possibile solo la rappresentazione parametrica)

(d) $\underline{u}(t) = (r_0 e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta_0), r_0 e^{\alpha t} \sin(\beta t + \theta_0))$
 (spirali)

CLASSIFICAZIONE

(a)	(b)	(c)	(d)
NODO	STELLA	NODO IMPR.	FUOCO



DIPENDENZA DA PARAMETRI : richiami di teoria della biforcazione ⁽¹³⁾
(o stabilità strutturale)

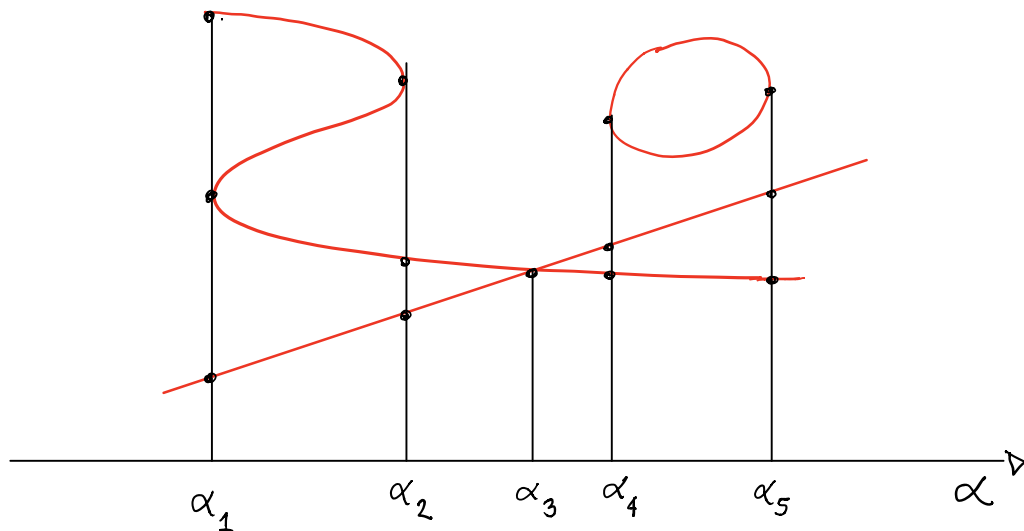
$$\dot{\underline{u}} = \underline{f}(\underline{u}, \alpha) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Nei problemi applicativi la soluzione dipende da uno (o più) parametri scalari.

Eq. degli equilibri : $\underline{f}(\underline{u}, \alpha) = 0$ è un luogo geometrico. I suoi "rami" si possono "risolvere" localmente in base al teor. della funzione implicita (DINI).

Ovviamente la risolubilità locale cresce in difficoltà al crescere delle dimensioni.

Caso semplice : \underline{f} si riduce ad una singola funzione scalare. Si osservano le seguenti situazioni:



14)
Il luogo $f(u, \alpha) = 0$ ha vari rami: ognuno di questi, per α fissato, definisce un punto di equilibrio. Al variare di α il n. di equilibri cambia in un modo che dipende dalla forma dei "rami". Anche la tipologia di equilibrio cambia.

Punti di diramazione α : sono i valori di α per i quali cambia il numero dei p. di equilibrio. α valori di α per i quali la tangente al grafico non è univocamente definita si dicono punti di biforcazione.

Con riferimento alla figura $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ e α_5 sono punti di diramazione mentre α_3 è un p. di biforcazione.

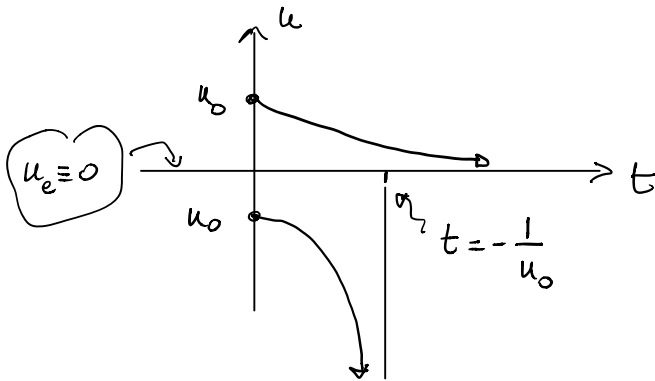
Sia i punti di inversione che quelli di biforcazione sono generalmente caratterizzati da una variazione stabile - instabile passando da un ramo all'altro.

ESEMPIO 1 $u = \mu - u^2$ dove
 $\mu \in \mathbb{R}^+$. Allora $u_e = \pm \sqrt{\mu}$ sono equilibri. Se uso il principio di linearizzazione si ha
 $Df(\mu, u) = -2u \Rightarrow Df(\mu, \sqrt{\mu}) = -2\sqrt{\mu} < 0$

Pertanto $u_e = \sqrt{\mu}$ è asint. cond. stabile mentre

$Df(\mu, -\sqrt{\mu}) = 2\sqrt{\mu} > 0$ e $u_e = -\sqrt{\mu}$ è instabile (15)

Se $\mu = 0$, $u_e = 0$ è l'unico eq. non posso usare il pr. di linearizzazione; l'eq. si riduce a $\dot{u} = -u^2$ da cui $\dot{u} < 0$ e $u_e = 0$ è instabile!

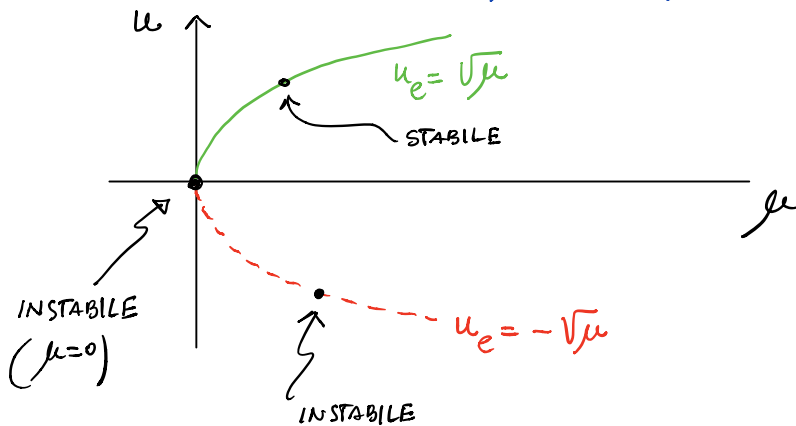


$\dot{u} = -u^2$

Questo problema ha soluzione esplicita $u(t) = \frac{u_0}{1 + u_0 t}$

Diagramma di biforcazione: rappresentiamo il luogo degli equilibri

$f(\mu, u) = 0 = \mu - u^2$

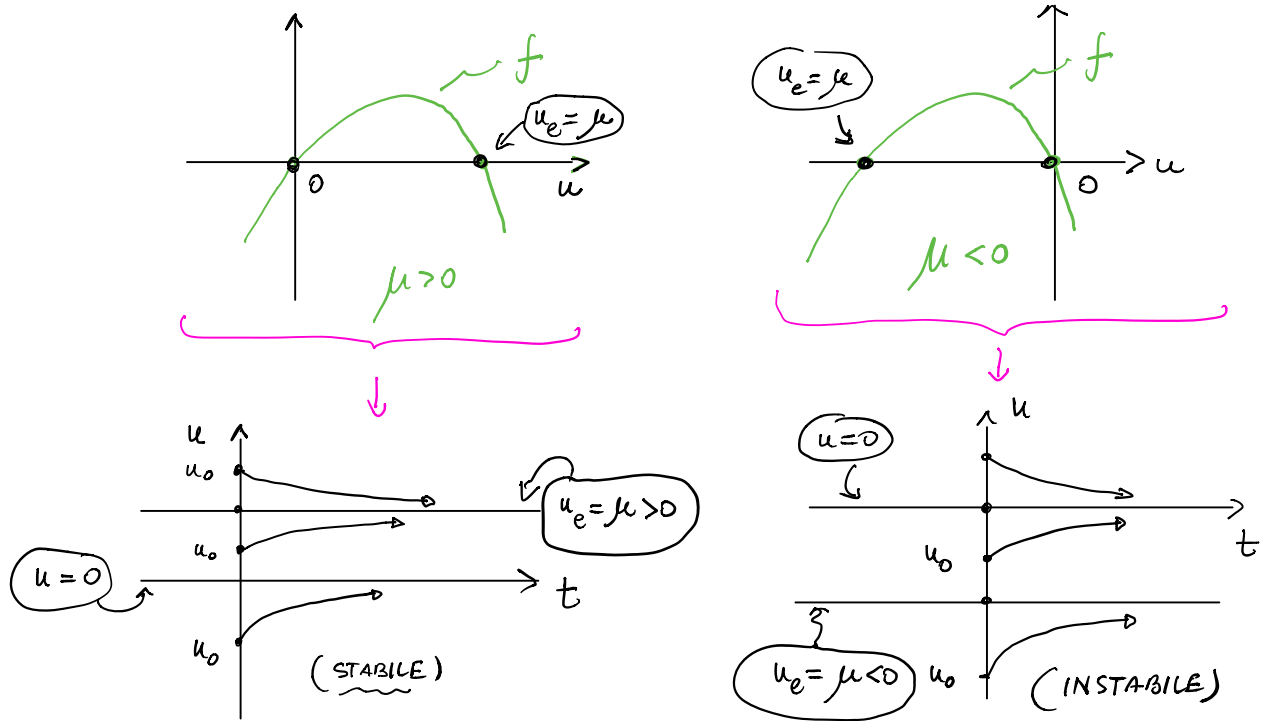


AL VARIARE DI μ il numero di equilibri non cambia ma cambia la loro

natura: $\mu = 0$ è un punto di inversione

ESEMPIO 2. $\dot{u} = \mu u - u^2 = f(u, \mu)$, $f_u = \mu - 2u$ (16)

Ci sono 2 equilibri $u_e = 0$ e $u_e = \mu$



Quindi (per $\mu > 0$)

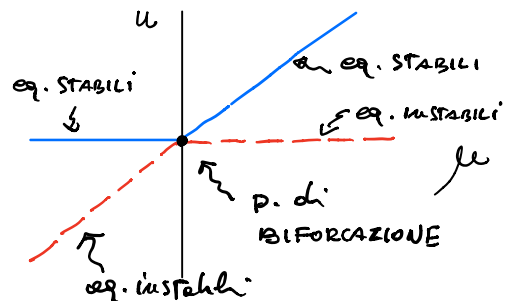
$$\begin{cases} u_e = 0 & \text{INSTABILE} \\ u_e = \mu & \text{STABILE} \end{cases}$$

Quindi (per $\mu < 0$)

$$\begin{cases} u_e = 0 & \text{STABILE} \\ u_e = \mu & \text{INSTABILE} \end{cases}$$

ABBIAMO UNO SCAMBIO DI STABILITA' VARIANDO μ DA NEGATIVO A POSITIVO. DIAGRAMMA DI BIFORCAZIONE

$$f(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ \text{oppure} \\ u = \mu \end{cases} \Leftrightarrow$$



Il luogo geometrico $\{u=u(\mu) \mid f(u, \mu)=0\}$ è (17)
 l'unione di due rette e $\mu=0$ è un punto di biforcazione
 (la tangente non è definita) TRANSKRITICO: cambiando
 ramo del luogo geometrico si ha una transizione
 STABILE \rightarrow STABILE oppure INSTABILE \rightarrow INSTABILE. Se
 invece si resta sullo stesso ramo si ha una transizione
 stabile \Leftrightarrow INSTABILE.

Si può dare una definizione più rigorosa di p. di biforcazione
 usando il T. del Dini applicato alla possibilità di risolvere
 localmente $f(u, \alpha)=0$ in forme locali del tipo
 $u=u(\alpha)$: se $u=u(\alpha)$ è una soluzione di $f=0$
 allora $P=(\alpha, u(\alpha))$ è

(a) punto di inversione se $\frac{\partial f}{\partial u}(P)=0$ e $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(P) \neq 0$

(b) " " biforcazione se $\frac{\partial f}{\partial u}(P) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(P) = 0$

Si noti che i punti di inversione sono regolari (la tang.
 però è verticale nel piano (u, α)) mentre un p. di
 biforcazione è sempre singolare (la tangente non è
 definita).

OSSERVAZIONE: quando non è applicabile il pr. di
 linearizzazione sono disponibili altri metodi dei

quindi il più famoso è quello basato sull'esistenza (18)
di una funzione di Liapunov.

Teorema di Liapunov : Sia \underline{u}_e un eq. isolato di $\underline{u}' = \underline{f}(\underline{u})$
e \mathcal{D}_e un opportuno intorno aperto di \underline{u}_e . Supponiamo che
esista una funzione $V = V(\underline{u})$ scalare (detta di L. opp.
"energia generalizzata") definita in \mathcal{D}_e e tale che

$$(a) \quad V \in C^0(\mathcal{D}_e), \quad V \in C^1(\mathcal{D}_e - \{\underline{u}_e\})$$

$$(b) \quad V \geq V(\underline{u}_e) \quad \forall \underline{u} \in \mathcal{D}_e$$

$$(c) \quad \frac{d}{dt} V(u(t, u_0)) \leq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \text{e} \quad \forall u_0 \in \mathcal{D}_e - \{\underline{u}_e\}$$

essendo $u_0 = u(0)$. Allora \underline{u}_e è STABILE. Se è anche
 $\frac{d}{dt} V(u(t, u_0)) < 0$ allora la stabilità è asintotica.

Esempio : nei sistemi Lagrangiani di tipo conservativo è
facile identificare la f. di L. come l'energia potenziale del
sistema e ogni minimo locale isolato è un punto di
equilibrio stabile. Una funzione di L. può essere anche
se il sistema è dissipativo.

La maggior difficoltà nell'utilizzo del T. di L. sta nella
possibilità concreta di individuare la funzione V !

Esempio : consideriamo l'eq. $\ddot{u} + \dot{u} + \alpha u + \beta u^3 = 0$.
con α e β parametri.

Questo si riduce ad un sist. del I ordine :

$$u = u_1, \quad \dot{u} = u_2 \Rightarrow \begin{cases} \dot{u}_1 = u_2 \\ \dot{u}_2 = -u_2 - \alpha u_1 - \beta u_1^3 \end{cases}$$

e quindi

$$f(\underline{u}) = (u_2, -u_2 - \alpha u_1 - \beta u_1^3)$$

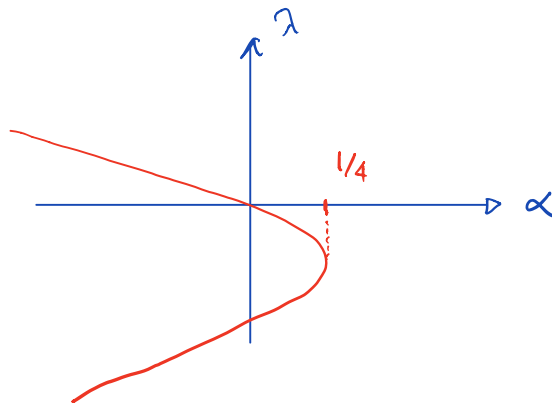
EQUILIBRI : $\underline{u}_e^{(1)} = (0, 0)$, $\underline{u}_e^{(\pm)} = \left(\pm \sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}}, 0 \right)$
 \underline{u}_e^{\pm} esistono solo se $\alpha \cdot \beta < 0$. Gli eq. sono isolati.

Analisi lineare

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - 3\beta u_1^2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J(\underline{u}_e^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -1 \end{pmatrix}; \quad -\lambda(-1-\lambda) + \alpha = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda + \alpha = 0 \rightarrow \lambda(\alpha) = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\alpha}}{2}$$



$$\alpha \in (0, \frac{1}{4}) \Rightarrow \lambda < 0$$

e due autovalori
reali

$$\alpha > \frac{1}{4} \text{ autov. compl.}$$

coniugati con p. reale
negativa

$\alpha < 0$ $\lambda^- < 0 < \lambda^+$ autov. reali e discordi in segno 20

Quindi $u_e = 0$ è $\begin{cases} \text{instabile (sella) se } \alpha < 0 \\ \text{stabile (nodo se } \alpha \in (0, 1/4), \text{ fuoco se } \\ \alpha > 1/4) \end{cases}$

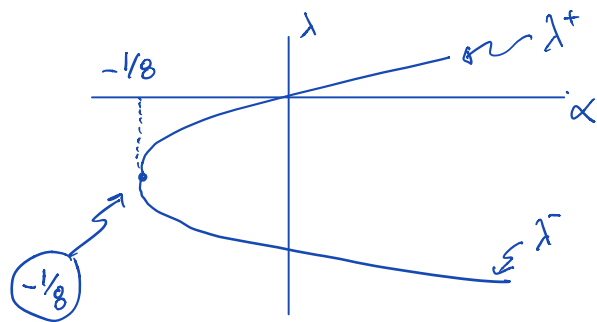
Analizzando $u_e^{(\pm)}$ si ha

$$J(u_e^{(\pm)}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - 3\beta \cdot \left(-\frac{\alpha}{\beta}\right) & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\alpha & -1 \end{pmatrix}$$

$$-\lambda(-1-\lambda) - 2\alpha = 0 \iff \lambda^2 + \lambda - 2\alpha = 0$$

$$\lambda^{\pm} = \frac{1}{2} \left(-1 \pm \sqrt{1 + 8\alpha} \right)$$

quindi:



La matrice J è la stessa per $u_e^{(\pm)}$:

$\alpha < -\frac{1}{8}$ fuoco stabile

$\alpha \in \left(-\frac{1}{8}, 0\right)$ nodo stabile

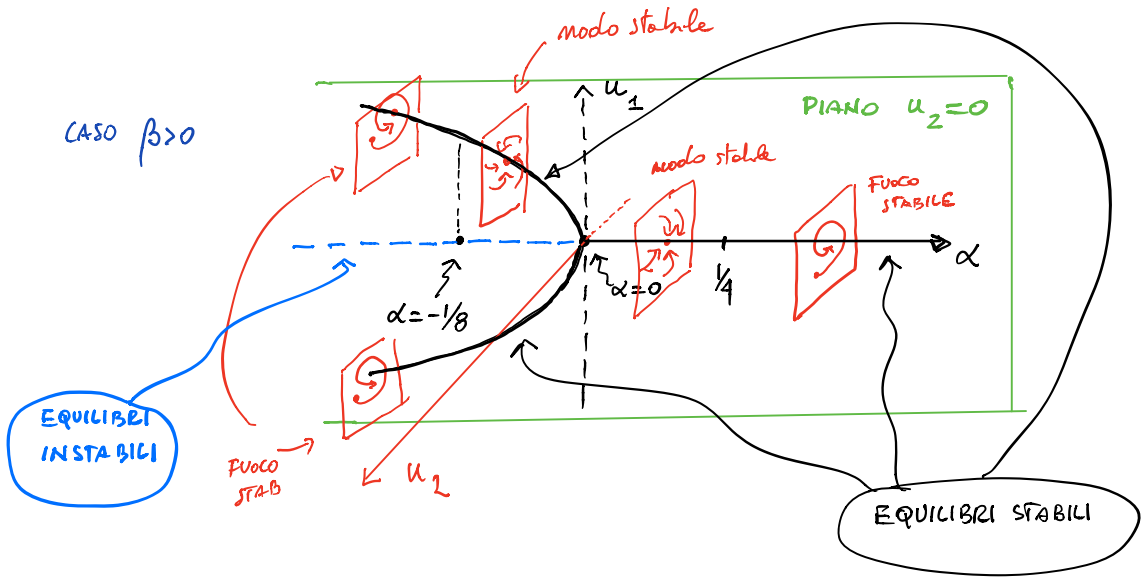
$\alpha > 0$ instabile (nodo perché la mult. geom. risulta 2)

DIAGRAMMA DI BIFORCAZIONE : due diverse situazioni

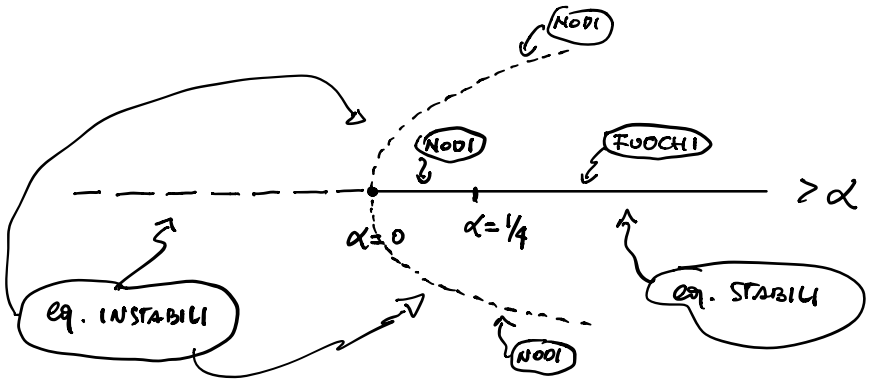
Gli equilibri sono descritti da $u_2=0$ e $-u_2-\alpha u_1-\beta u_1^3=0$
cioè

$$\alpha u_1 + \beta u_1^3 = u_1(\alpha + \beta u_1^2) = 0$$

Nel piano u_1, α ci sono due rami



CASO $\beta < 0$



L'esempio precedente mostra un caso di biforcazione "a forcelle"

Nel caso $\beta > 0$: variando α da valori positivi a valori negativi
c'è uno scambio di stabilità REGOLARE : l'equilibrio stabile

$u_1 = 0$ si scambia con l'eq. ^{STABILE} $u_1 = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ "con continuità" (22)

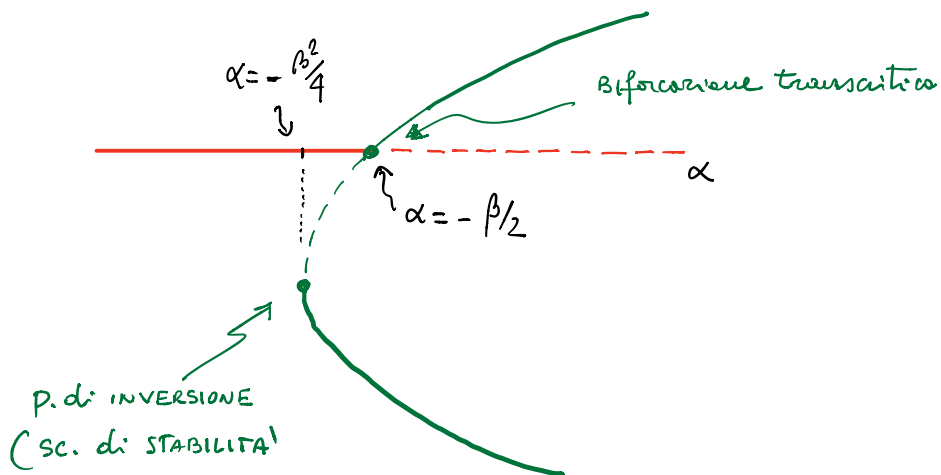
Questo tipo di biforcazione è detta supercritica

Nel caso $\beta < 0$: variando α da valori positivi a negativi non c'è scambio di stabilità (cioè non esistono punti di equilibrio "alternativi" verso i quali la soluzione perturbata può convergere)
Questo tipo di biforcazione è detta sottocritica

ESEMPIO (biforcazione transcritica con inversione)

$$\dot{\underline{u}} = f(\underline{u}) = (u_2, -u_2 + \alpha u_1 - \beta u_1^2 - u_1^3) \quad (\beta > 0)$$

L'analisi di questo caso mostra che il diagramma di biforcazione ha la forma



ESEMPIO (forcella sottocritica e punti di inversione)

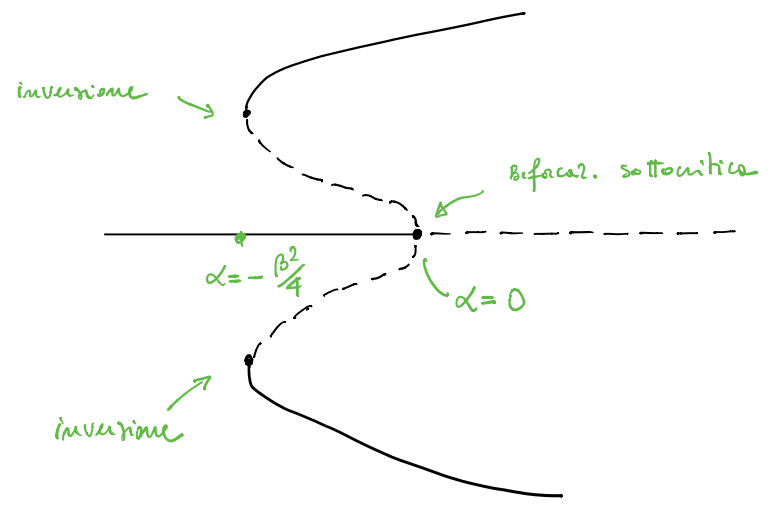
$$\dot{\underline{u}} = f(\underline{u}) = (u_2, -u_2 + \alpha u_1 + \beta u_1^3 - u_1^5) \quad (\beta > 0)$$

Il luogo geometrico dei p. di equilibrio nel piano $u_2=0$ ha cinque rami, $u_2=0$ e quelli che si ottengono risolvendo

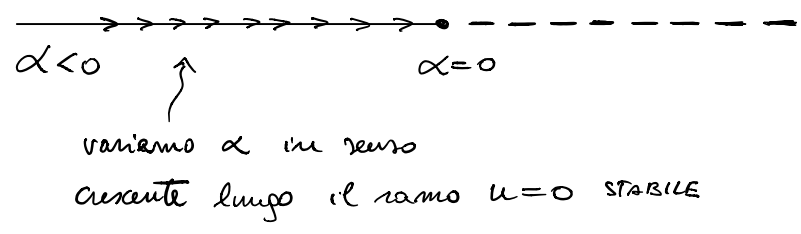
$$\alpha + \beta u_1^2 - u_1^4 = 0, \text{ cioè } u_1^2 = -\frac{\beta}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\beta^2 + 4\alpha}$$

$$\left(\alpha > -\frac{\beta^2}{4}\right) \text{ ovvero } u_1 = \pm \sqrt{-\frac{\beta}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\beta^2 + 4\alpha}} \quad \left(\alpha > -\frac{\beta^2}{4}\right)$$

In questo caso il diagramma di biforcazione ha la forma

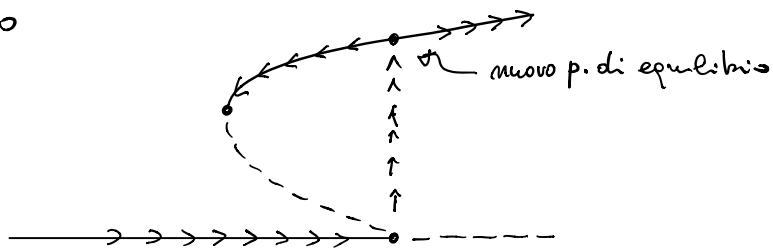


Questa situazione può dare luogo al fenomeno dell'isteresi



gli punti per $\alpha > 0$ lungo $u=0$ sono instabili. Per una piccola perturbazione la soluzione tende ad un nuovo punto di equilibrio

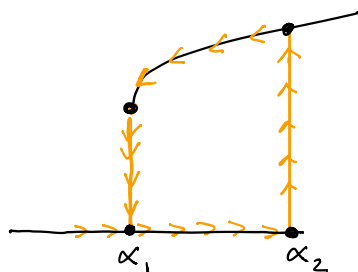
(29)



Se diminuiamo α fino al valore $\alpha = -\frac{\beta^2}{4}$ (se si aumenta α l'equilibrio si sposta verso altri punti stabili con continuità)

il punto $\alpha = -\frac{\beta^2}{4}$ corrisponde a $u = \sqrt{-\beta/2}$ che è

instabile (di inversione): diminuendo ulteriormente α verso valori $\alpha < -\frac{\beta^2}{4}$ il sistema avrà, per effetto di una qualsiasi perturbazione, un nuovo punto stabile. L'unico eq. stabile possibile per $\alpha < -\frac{\beta^2}{4}$ è $u=0$. L'evoluzione osservata è un ciclo di isteresi



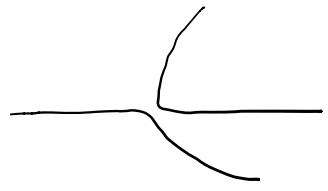
Eseguendo un ciclo $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \alpha_1$ lo stato di equilibrio

passa da $u(\alpha_1)=0$ a $u(\alpha_2)=0$ a $u(\alpha_2) \neq 0$

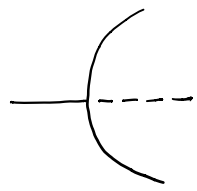
e infine a $u(\alpha_1) \neq 0$.

Se si fanno variare liberamente entrambi i parametri in un problema del tipo $\dot{u} = f(u, \alpha, \beta)$ la situazione è decisamente più complessa!

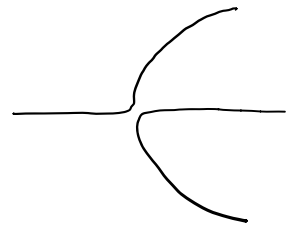
Esempio: $\dot{u} = \alpha u - u^3 - \beta$. Si osservano i seguenti diagrammi di biforcazione



$\beta = 0.015$
(i rami sono separati)



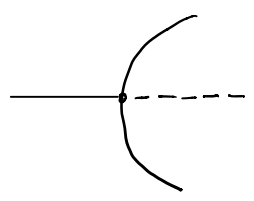
$\beta = 0$
(supercritica)



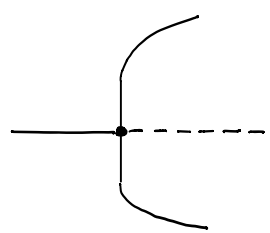
$\beta = -0.015$
(i rami sono separati)

(verificare per conto proprio)

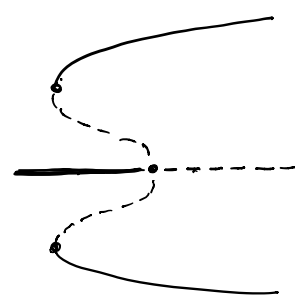
Esempio: $\ddot{u} = -\dot{u} + \alpha u - \beta u^3 - u^5$



$\beta = 2$
(supercritica)



$\beta = 0$



$\beta = -3$
(sottocritica)

Per β decrescente si ha una transizione "catastrofica" da supercritica a sottocritica

NON SEMPRE LA PERDITA DI STABILITA' COMPORTA LA TRANSIZIONE VERSO UN NUOVO EQUILIBRIO STAZIONARIO

CICLI LIMITE : è un particolare tipo di attrattore costituito da un'orbita chiusa Γ tale da "attrarre" o "respingere" orbite non stazionarie.

ciclo limite stabile : $\exists \mathcal{U}_\Gamma$ tale che se $u_0 \in \mathcal{U}_\Gamma$ allora $\underline{u}(t, u_0) \rightarrow P \in \Gamma$ per $t \rightarrow \infty$ (asintoticamente)

ciclo limite instabile : $\forall \mathcal{U}_\Gamma \exists u_0 \in \mathcal{U}_\Gamma$ e un $\bar{t} > 0$ t.c. $\underline{u}(\bar{t}, u_0) \notin \mathcal{U}_\Gamma$

ciclo limite semi-stabile : il ciclo è stabile per orbite che hanno origine in un intorno di Γ ma all'esterno di Γ , instabile per quelle che hanno origine all'interno

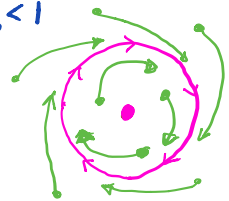
Esempio $\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(1-\rho^2) \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases}$ (usiamo coord. polari) $\frac{d\rho}{d\theta} = \rho(e^2-1)$

ci sono due equilibri : $\rho=0$ e $\rho=1$

$\dot{\theta} = -1 \rightarrow \theta(t) = \theta_0 - t$ (rotazione oraria)

Il sistema ha una soluzione esplicita :

$$\rho(\theta) = \begin{cases} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\rho_0^2}\right) e^{2(\theta-\theta_0)} \right]^{-1/2} & \text{se } \rho_0 > 1 \\ \left[\left(\frac{1}{\rho_0^2} - 1\right) e^{2(\theta-\theta_0)} + 1 \right]^{-1/2} & \text{se } \rho_0 < 1 \end{cases}$$

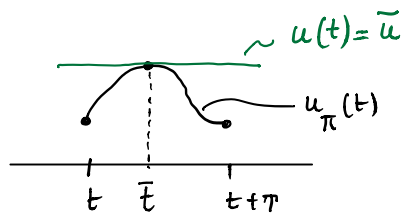


$\rho=1$ è stabile ($\rho > 1 \rightarrow \dot{\rho} < 0$, $\rho < 1 \rightarrow \dot{\rho} > 0$)

$\rho=0$ è instabile. Si noti che le soluzioni stazionarie $\rho=1$ e $\rho=0$ prescindono da $\theta(t)$ che non è mai costante.
 L'orbita $\rho(\theta(t))=1$ viene "disegnata" al variare di t dal punto $(\rho(\theta(t)), \theta(t))$

Generalmente si osservano cicli limite in corrispondenza di biforcazione da stati stazionari. Questo fenomeno è possibile solo se $n \geq 2$ perché le eq. $\dot{u} = f(u)$ uni-dimensionali non possiedono soluzioni periodiche: infatti se esiste $T > 0$ t.c. $u(t+T) = u(t)$ con $\dot{u} = f(u)$ allora per il t. di Rolle $\exists \bar{t} \in (t, t+T)$ tale che $\dot{u}(\bar{t}) = 0 \Rightarrow f(u(\bar{t})) = 0$. Posto $\bar{u} = u(\bar{t})$, e' eq. avrebbe anche la soluzione stazionaria $u(t) = \bar{u} \forall t$. Ci sarebbero allora due soluzioni corrispondenti al medesimo dato iniziale \bar{u} , la periodica $u_\pi(t)$ e la stazionaria

che per $t = \bar{t}$ assumono lo stesso valore



La ricerca di cicli limite nei casi concreti non è un problema banale!

Teor. di Poincaré-Bendixon (solo in \mathbb{R}^2). Supponiamo che, per l'eq. $\dot{u} = f(u)$,

- (A) $\exists D \subset \mathbb{R}^2$ che non contiene punti stazionari e nessuna orbita non stazionaria può uscire da D (limitato

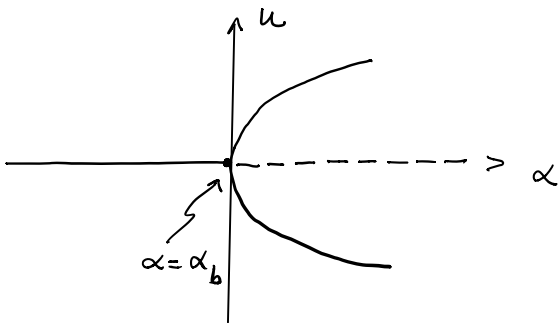
pu' ipotesi) . Allora \mathcal{D} contiene un ciclo limite

(B) Se $\nabla \cdot f = \partial_{u_1} f_1 + \partial_{u_2} f_2 \in C^0(\mathcal{D})$ e ha segno costante in \mathcal{D} allora \mathcal{D} non contiene cicli limite

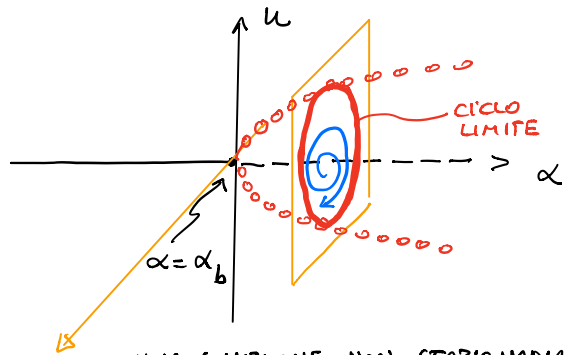
E' ovviamente facile applicare il T. nel caso (B) (quindi in senso negativo) , molto piú problematico è l'uso pratico della (A) (cioè per determinare l'esistenza di cicli limite) .

Per particolari tipi di eq. esistono teor. piú specifici che forniscono cond. sufficienti (es. teor. di Levinson - Smith)

BIFORCAZIONE DI HOPF : sia $\dot{u} = f(u)$ e u_e eq. stabile se $\alpha < \alpha_b$ e instabile se $\alpha > \alpha_b$



BIFORC. SUPERCRITICA
VERSO EQUILIBRI
STAZIONARI



UNA SOLUZIONE NON STAZIONARIA,
RESPINTA DALL' EQ. INSTABILE $u=0$
QUANDO $\alpha > 0$, è attratta da
un ciclo limite .

IL CICLO PUO' ESSERE STABILE O
SEMI-STABILE

TEOR. di HOPF : sia $u_e(\alpha) \in \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) asintoticamente stabile per $\alpha < \alpha_b$ e instabile per $\alpha > \alpha_b$. Supponiamo che

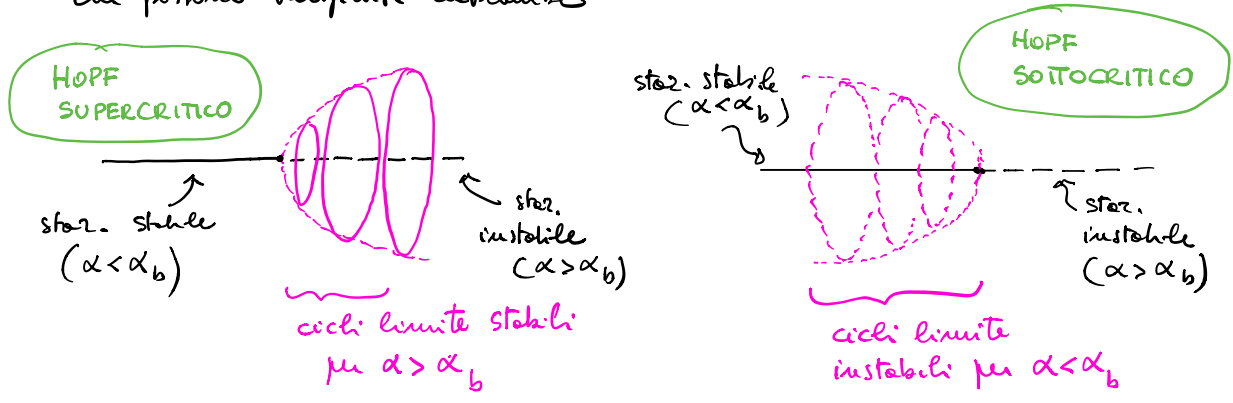
- (A) nel punto critico $\alpha = \alpha_b$ lo jacobiano di $f(u)$ abbia una coppia di autovalori PURAMENTE IMMAGINARI λ , cioè tali che $Re(\lambda(\alpha_b)) = 0$ e $Im(\lambda(\alpha_b)) \neq 0$
- (B) ogni altro autovalore abbia parte reale negativa
- (C) $\left[\frac{d}{d\alpha} Re(\lambda(\alpha)) \right]_{\alpha=\alpha_b} > 0$

Allora, per α in un intorno di α_b , esiste un ciclo limite con periodo iniziale

$$T = \frac{2\pi}{Im(\lambda(\alpha = \alpha_b))}$$

- (D) se $u_e(\alpha = \alpha_b)$ è localmente asintoticamente stabile allora il ciclo limite è stabile

Il t. di H. non distingue fra queste due diverse situazioni che possono verificarsi entrambe



Per poter distinguere i due casi occorrono tecniche non lineari (il metodo lineare non si può applicare perché almeno un autovalore ha parte reale nulla).

Esempio

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \alpha u_1 - u_2 - u_1(u_1^2 + u_2^2) \\ \dot{u}_2 = \alpha u_2 + u_1 - u_2(u_1^2 + u_2^2) \end{cases}$$

$\underline{u}_e = (0, 0)$ è un eq. isolato $\forall \alpha$; non esistono altri eq. isolati.

Risulta

$$J(\underline{u}_e) = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

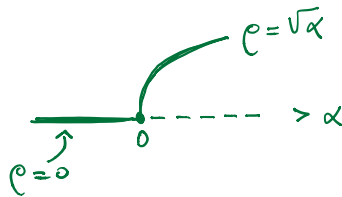
i cui autovalori sono $\lambda^\pm = \alpha \pm i$

Abbiamo che $\text{Re}(\lambda) < 0 \Leftrightarrow \alpha < 0$, $\text{Re}(\lambda(0)) = 0$ e
che $\left. \frac{d}{d\alpha} \text{Re}(\lambda) \right|_{\alpha=0} = 1 > 0$. In un intorno di $\alpha = 0$

esiste un ciclo limite di periodo $T = 2\pi$!

Utilizzando la variabile complessa $z = u_1 + i u_2$ possiamo riscrivere il sistema nella forma $\dot{z} = (\alpha + i)z - z|z|^2$ e posto poi $z = \rho e^{i\theta}$ passare alla forma polare

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$



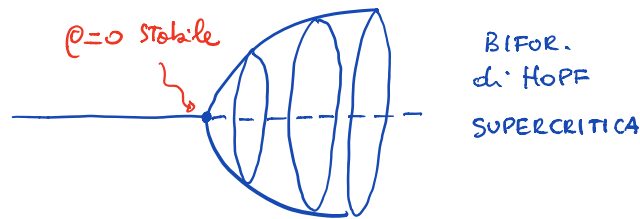
Oltre a $\rho = 0$, $\rho = \sqrt{\alpha}$ è un eq. isolato per $\alpha > 0$.

L'analisi lineare mostra che $\rho = 0$ è asint. stabile se $\alpha < 0$ e instabile se $\alpha > 0$; $\rho = \sqrt{\alpha}$ è asintotic. stabile (sign $\dot{\rho} = \text{sign}(\alpha - \rho^2)$)

Se $\alpha = 0$ non possiamo usare il m. di linearizzazione. Tuttavia

$\alpha = 0 \Rightarrow \dot{\rho} = -\rho^3 < 0 \Rightarrow \rho = 0$ è asint. stabile

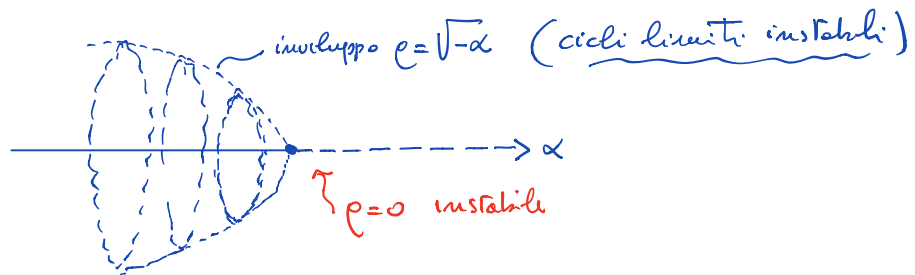
Per $\alpha > 0$, $\rho = \sqrt{\alpha}$ rappresenta un'orbita chiusa per ogni α fissato. Ci sono infiniti cicli limite piccoli con velocità costante in senso antiorario ($\dot{\theta} = 1 > 0$) il cui involucro in \mathbb{R}^3 è un paraboloide



Esempio

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \alpha u_1 - u_2 + u_1(u_1^2 + u_2^2) \\ \dot{u}_2 = \alpha u_2 + u_1 + u_2(u_1^2 + u_2^2) \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\alpha + \rho^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Il cambio di segno nell'ultimo termine dà luogo ad una biforcazione di Hopf SOTTO CRITICA



$\rho = 0$ è instabile se $\alpha = 0$ poiché $\dot{\rho} = \rho^3 > 0$; $\rho = 0$ è stabile per $\alpha < 0$ e instabile per $\alpha > 0$ in virtù del pr. di stabilità lineare poiché $\dot{\rho} \sim \alpha \rho$.

Per $\rho = \sqrt{-\alpha}$ si hanno cicli limite instabili !