# Modello per la deposizione

Se $T_i < T_e < T_{cloud}$ il sistema evolve attraverso 3 stadi

1. Completa saturazione (STADIO 1)
2. Parziale saturazione (STADIO 2)
3. Completa desaturazione (STADIO 3)

## STADIO 1

è descritto da $G(r,t)$ e da $C_s(T(r))$

Entrambe diffondono

Scriviamo l'equazione di diffusione per $G$ ($D_G$ è diffusività di cero segreg.)

$$\frac{\partial G}{\partial t} - D_G \Delta_r G = Q$$

$Q$ è il rate di trasformazione segregato/disciolto

$$\Delta_r G = \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right)$$

$Q > 0$ ( $G$ aumenta ) disciolto $\rightarrow$ segr.

$Q < 0$ ( $G$ diminuisce ) segr. $\rightarrow$ disciolto

Se scriviamo l'eq. di diffusione per $C_s(T)$

$C_s$ non dipende da $t$

$$\cancel{\frac{\partial C_s}{\partial t}} - D_w \Delta_r C_s = -Q \qquad \frac{\partial C_s}{\partial r} = b_w \frac{\partial T}{\partial r} \qquad \frac{\partial^2 C_s}{\partial r^2} = b_w \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$$

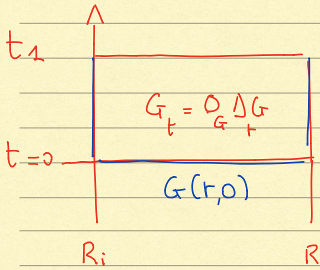
$$\frac{Q}{D_w} = \frac{\partial^2 C_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial C_s}{\partial r} = b_w\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) = b_w \cancel{\Delta_r T} = 0 \implies Q = 0$$

$\Rightarrow$ l'eq.ne nello stadio 1 è

$$\boxed{\frac{\partial G}{\partial t} - D_G\left(\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial r}\right) = 0} \quad (E1)$$

Dominio (E1)

C.I. $G(r,0) = G_0(r) = C^*_{tot} - C_s(T(r)) > 0$

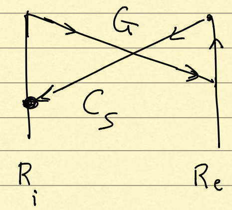



C.C. Su $r = R_i$ prendiamo flusso nullo

$$\boxed{-D_G \frac{\partial G}{\partial r}(R_i,t) = 0}$$

Su $r = R_e$ scriviamo il bilancio di flusso

$$\underbrace{-D_G \frac{\partial G}{\partial r}(R_e,t)}_{\text{flusso di } G \text{ su } R_e} = \underbrace{+D_w \frac{\partial C_s}{\partial r}\Big|_{r=R_e}}_{\text{flusso di } C_s \text{ su } R_e}$$




STADIO 1

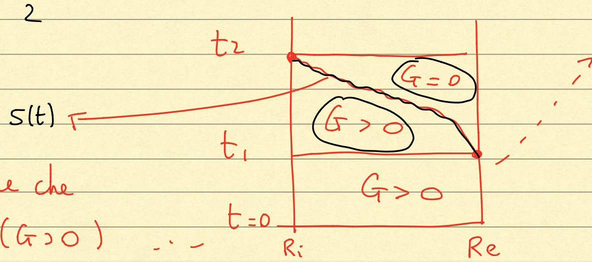
$$\begin{cases} G_t - D_G \Delta_r G = 0 & [R_i, R_e] \quad t \in [0, t_1] \\ G(r,0) = G_0(r) & '' \quad ' \\ \dfrac{\partial G}{\partial r}(R_i,t) = 0 & t \in [0,t_1] \\ D_G \dfrac{\partial G}{\partial r}(R_e,t) = -D_w b_w \dfrac{(T_e - T_i)}{\ln(R_e/R_i)} \dfrac{1}{R_e} & t \in [0,t_1] \end{cases}$$

lo stadio 1 si esaurisce al tempo $t = t_1$ t.c. $G(R_e,t_1) = 0$

Si passa allo stadio 2

$r = S(t)$

fronte di desaturazione che separa la fase satura $(G>0)$




dalla fase insatura $G=0$

Nello stadio 2 dobbiamo scrivere le equazioni per

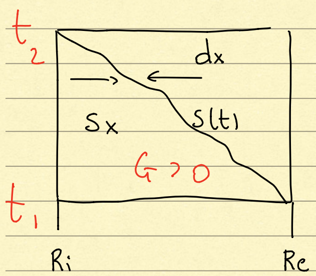
$G$ $(r \in [R_i, s])$ e per $C$ $(r \in [s, R_e])$

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial t} - D_G \Delta_r G = 0 & \text{in } [R_i, s(t)] \text{ e } t \in [t_1, t_2] \\[2ex] \dfrac{\partial C}{\partial t} - D_w \Delta_r C = 0 & \text{in } [s(t), R_e] \text{ e } t \in [t_1, t_2] \end{cases}} \quad (2.1)$$

Il fronte di desaturazione è incognito $(r = s(t)$ è una frontiera libera$)$

Su $r = s(t)$ ovviamente impongo $\boxed{G(s,t) = 0}$ (2.2)

L'altro condizione che impongo è bilancio di flusso




$$\boxed{\underbrace{D_G \frac{\partial G}{\partial r}(s,t) + D_w \frac{\partial C_s}{\partial r}(s,t)}_{\text{Sx flux}} = \underbrace{D_w \frac{\partial C}{\partial r}(s,t)}_{\text{dx flux}}} \quad (2.3)$$

Infine diamo le cond. su $r = R_i$ e $r = R_e$

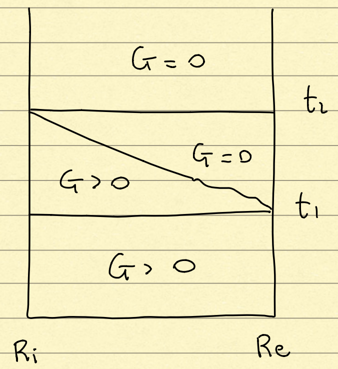
$$\boxed{\frac{\partial G}{\partial r}(R_i, t) = 0 \qquad \frac{\partial C}{\partial r}(R_e, t) = 0} \quad (2.4)$$

Il pb.mo nello stadio 2 è dato da (2.1), (2.2), (2.3), (2.4)

Il dato iniziale per $G$ allo stadio 2 lo prendo dallo stadio 1 $G(r, t_1)$. Lo stadio 2 si esaurisce quando $s(t_2) = R_i$

## STADIO 3

Nello stadio 3 ho solamente cera disciolta $c(r,t)$




L'equazione da risolvere sarà

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial c}{\partial t} - D_w \Delta_r c = 0 & \text{in } [R_i, R_e] \quad t \geq t_2 \\ \dfrac{\partial c}{\partial r}(R_e, t) = 0 & t \geq t_2 \\ c(R_i, t) = c_s(T_i) & \\ c(r, t_2) \ \text{cond. iniziale (presa dallo stadio 2)} & \end{cases} \qquad (Pb\,3)}$$

Oss. Se $T_i < T_{cloud} < T_e$ il sistema parte dallo stadio 2

Lo soluzione stazionaria è $c_\infty = c_s(T_i)$