

Approfondimenti Lezione 2

Mara Bruzzi

APPROFONDIMENTO : BOSONI

Particelle come le α , i fotoni, i mesoni hanno invece funzioni d'onda simmetriche ψ_S . Esse non obbediscono al principio di esclusione di Pauli. Tali particelle sono dette BOSONI.

La presenza di un bosone in un particolare stato quantistico aumenta la probabilità che altri bosoni identici vengano trovati in tale stato (i laser sono un esempio di questo fenomeno).

Probabilità di trovare due particelle nello stesso stato: $n = m$

Particelle distinguibili (caso classico):

$$\varphi_B = \varphi_{nn}(2,1) = \varphi_{nn}(1,2) = \varphi_n(1)\varphi_n(2) = \varphi_n(2)\varphi_n(1)$$



$$\frac{dP_B}{dV} = \varphi^*_{*B} \varphi_B = \varphi_n(1)\varphi_n(2)\varphi_n^*(1)\varphi_n^*(2)$$

Particelle indistinguibili (Bosoni):

$$\varphi_{BE} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_n(1)\varphi_n(2) + \varphi_n(2)\varphi_n(1)] = \frac{2}{\sqrt{2}} \varphi_n(1)\varphi_n(2)$$



$$\frac{dP_{BE}}{dV} = \varphi^*_{*BE} \varphi_{BE} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 \varphi_n(1)\varphi_n(2)\varphi_n^*(1)\varphi_n^*(2) = 2 \frac{dP_B}{dV}$$

Perciò la probabilità di trovare due bosoni nello stesso stato in un esperimento è DUE VOLTE la probabilità di trovare nello stesso stato due particelle classiche.

Approfondimento: Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

E' un metodo che si utilizza nel caso si vogliono calcolare il massimo/minimo di funzioni di più variabili $F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ quando le variabili non sono tra loro indipendenti, ma correlate da relazioni note. Supponiamo ad esempio che tali relazioni siano esprimibili mediante la condizione $\phi_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$ (1) e $\phi_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$ (2). Avremo quindi soltanto $n-2$ variabili indipendenti. Cerchiamo i valori $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ per cui $dF = 0$ per piccoli cambiamenti nelle variabili. Osservo che:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3} dx_3 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad (3)$$

Non implica che: $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$, perché le variazioni dx_i non sono indipendenti. Esse sono correlate mediante le relazioni:

$$d\phi_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} dx_3 + \dots + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} dx_n = 0, \quad (4) \quad d\phi_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} dx_3 + \dots + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_n} dx_n = 0. \quad (5)$$

Moltiplichiamo ora le equazioni (4,5) per due quantità arbitrarie α e β e aggiungiamole alla (3). Otteniamo:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + \alpha \frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} + \beta \frac{\partial \phi_2}{\partial x_i} \right) dx_i = 0 \quad \text{Dato che abbiamo ora } n+2 \text{ variabili, con } \alpha \text{ e } \beta \text{ arbitrari, questo}$$

implica che: $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + \alpha \frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} + \beta \frac{\partial \phi_2}{\partial x_i} \right) = 0$ $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Questo set di n equazioni ci permette di ottenere $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ in funzione di α e β . La sostituzione in (1) e (2) ci permette quindi di determinare a e b e quindi di calcolare $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Approfondimento: Effetto Zeeman

Effetto osservato nel 1896 e poi spiegato mediante la quantizzazione spaziale, per cui e.g. **una linea spettrale di un atomo a un elettrone diventa un tripletto a causa della presenza di un campo magnetico**. L'effetto è spiegato adottando la quantizzazione della componente assiale del momento angolare.

L'elettrone che descrive una orbita circolare con velocità angolare ω corrisponde ad una spira di corrente:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{e}{T} = \frac{e}{2\pi} \omega$$

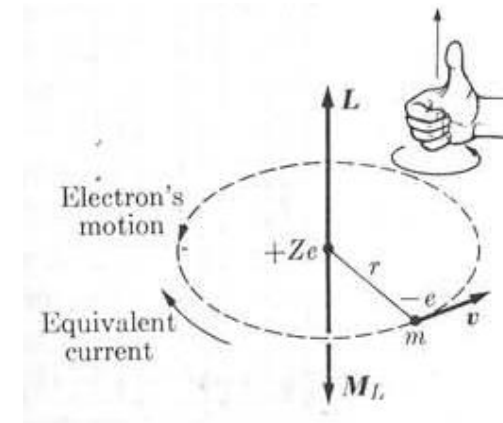
che può essere vista come un dipolo magnetico di momento:

$$M_L = I \cdot A = \frac{e}{2\pi} \omega \pi r^2 = \frac{1}{2} e \omega r^2$$

Dato che il momento angolare è pari a: $L = m_e v r$ otteniamo la seguente relazione tra momento di dipolo magnetico e momento angolare:

$$M_L = -\frac{e}{2m_e} L$$

poiché la carica dell'elettrone è negativa \underline{M}_L e \underline{L} sono vettori con stessa direzione e verso opposto.



In generale, si verifica che la relazione
risulta valida anche in

meccanica quantistica per un moto arbitrario con momento angolare \underline{L} . Considerando la
 regola di quantizzazione :

$$L_z = m_l \hbar$$

La componente z del momento
 magnetico orbitale diviene:

$$M_{Lz} = -\frac{e}{2m_e} L_z = -\frac{e\hbar}{2m_e} m_l = -\mu_B m_l$$

Ove abbiamo definito

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5.6564 \times 10^{-5} \frac{eV}{T} = \text{magnetone di Bohr.}$$

Applichiamo ora un campo magnetico \underline{B} lungo z.

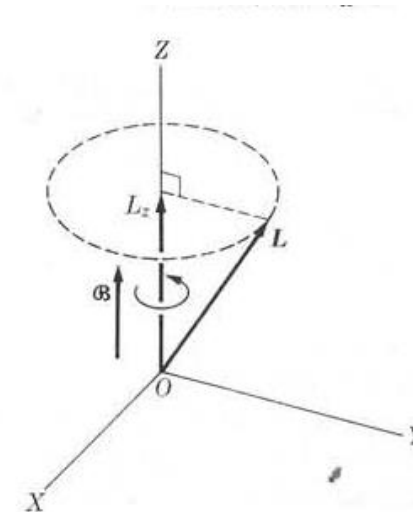
Il sistema acquisisce l'energia magnetica:

$$E_B = -\underline{M}_L \cdot \underline{B} = -M_{Lz} B = \mu_B m_l B$$

Sul dipolo magnetico agisce il momento della
 forza magnetica:

$$\underline{M} = \underline{M}_L \times \underline{B} = -\frac{e}{2m_e} \underline{L} \times \underline{B}$$

**Tale momento fa compiere una precessione del sistema attorno alla direzione
 del campo magnetico.**



La relazione:

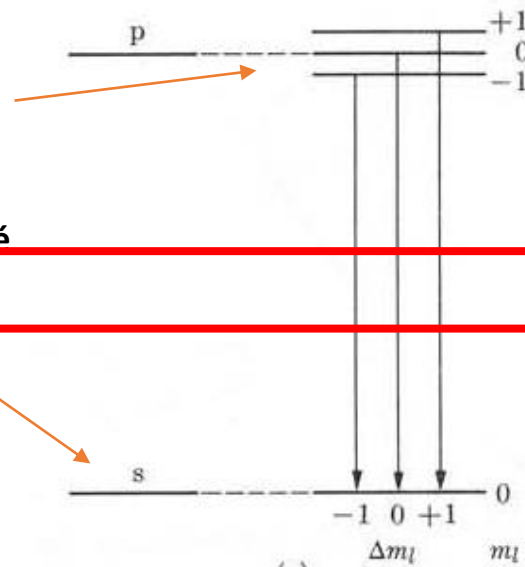
$$E_B = M_{Lz} B = \mu_B m_l B$$

mostra che l'energia del sistema assume $2\ell+1$ valori quantizzati secondo il numero quantico m_l , tutti equispaziati della quantità $\mu_B B$. In effetti questo è quello che si osserva sperimentalmente nell'effetto Zeeman.

Passaggio da un livello singolo p ad un tripletto in presenza di campo magnetico

L'effetto non si osserva con un livello s, perché $\ell = 0$ e quindi $m_l = 0$.

Il risultato è una riga spettrale che si trasforma in un tripletto.



Approfondimento: Esperimento di Stern- Gerlach (1924)

Mostra l'esistenza dello spin elettronico e la sua quantizzazione (secondo l'idea di Uhlenbeck e Goudsmith - 1926). Supponiamo che **un fascio di atomi ad un solo elettrone passi attraverso un campo magnetico non omogeneo**. L'effetto di questo campo sul dipolo magnetico è quello di esercitare una **forza la cui direzione e modulo dipendono dall'orientazione relativa del campo magnetico e del dipolo** (e.g. se il dipolo è orientato parallelamente al campo B esso tenderà a muoversi nella direzione in cui il campo B cresce, mentre se è antiparallelo, si muoverà nella direzione in cui il campo B diminuisce). Nell'esperimento di Stern-Gerlach **il campo disomogeneo è ottenuto modificando la forma delle facce dei poli magnetici**, ad esempio in modo che il campo aumenti andando da Sud a Nord.

Se gli atomi a un solo elettrone del fascio sono nello stato fondamentale ($\ell = 0$) hanno momento angolare orbitale nullo e quindi $M_L = 0$, **perciò la deviazione del fascio dipenderà solo dalla direzione di \underline{M}_S , cioè di quella dello spin \underline{S}** . Il risultato dell'esperimento è che il fascio che passa tra i due poli magnetici **viene diviso in due**. Questo dimostra che:

Lo spin elettronico può avere solo due orientazioni relative al campo magnetico: parallela o antiparallela.

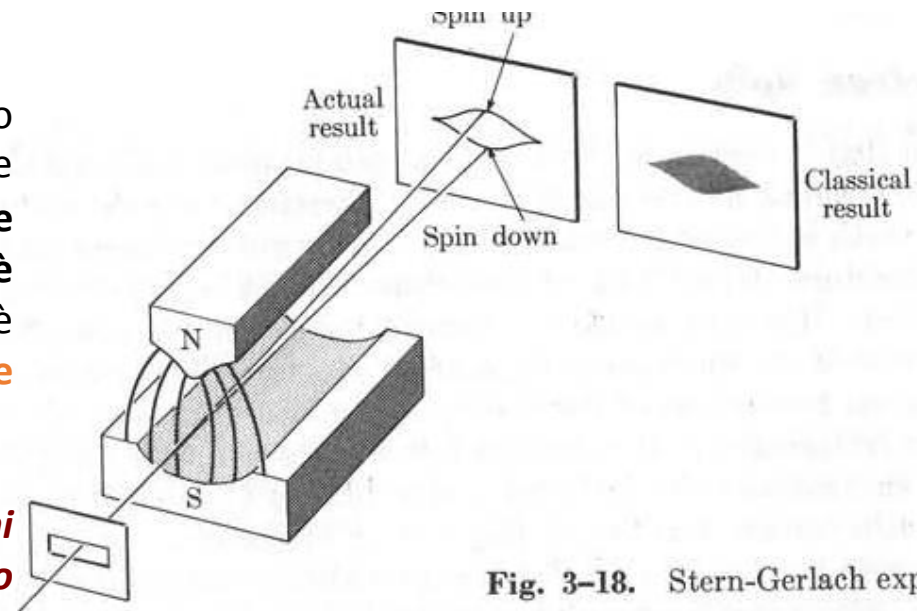


Fig. 3-18. Stern-Gerlach exp

5. Approfondimento: Gradino di potenziale

$$U(x) = 0 \text{ per } x < 0; \quad U = U_0 \text{ per } x > 0$$

A. L'energia della particella è minore del gradino : $\varepsilon < U_0$

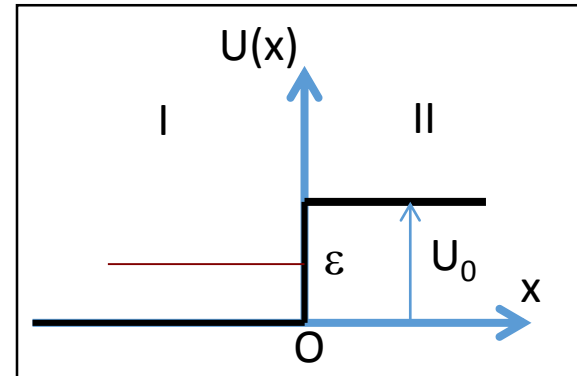
Regione I: $U(x) = 0$ quindi la particella è libera.

Equazione di Schroedinger:

$$\frac{d^2 \phi_I}{dx^2} + \frac{2m\varepsilon}{\hbar^2} \phi_I = 0$$

Che dà soluzione:

$$\phi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$



Dove e^{ikx} rappresenta l'onda incidente, e^{-ikx} rappresenta quella riflessa dalla barriera.

regione II. $U(x) = U_0$ con eq. di Schroedinger:

$$\frac{d^2 \phi_{II}}{dx^2} + \frac{2m(\varepsilon - U_0)}{\hbar^2} \phi_{II} = 0$$

Definendo: $\alpha^2 = \frac{2m(U_0 - \varepsilon)}{\hbar^2}$, l'equazione diviene: $\frac{d^2 \phi_{II}}{dx^2} - \alpha^2 \phi_{II} = 0$ con

Soluzione: $\phi_{II}(x) = Ce^{-\alpha x}$

per la meccanica classica la particella non potrebbe trovarsi nella regione $x > 0$, per la meccanica quantistica c'è una probabilità non nulla di trovare la particella in tale regione.

Per determinare le costanti A,B,C imponiamo le condizioni al contorno per le regioni I/II, cioè la continuità della funzione d'onda e della sua derivata prima.

In $x = 0$: $\phi_1 = \phi_2$ e $\frac{d\phi_1}{dx} = \frac{d\phi_2}{dx}$ cui si ha: $A + B = C$ e $ik(A-B) = -\alpha C$.

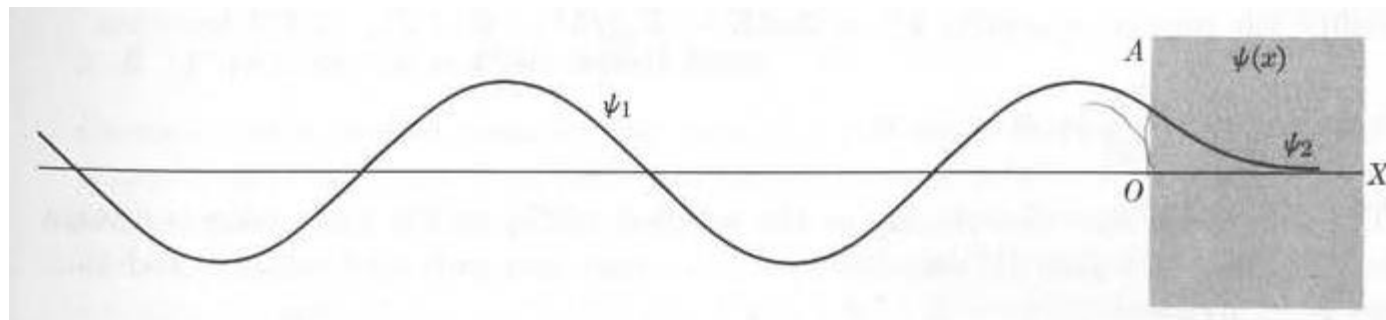
Otteniamo : $B = \frac{(ik + \alpha)A}{ik - \alpha}$ $C = \frac{2ikA}{ik - \alpha}$ per cui:

$\phi_1(x) = A \left(e^{ikx} + \frac{ik + \alpha}{ik - \alpha} e^{-ikx} \right)$ $\phi_2(x) = \frac{2ik}{ik - \alpha} A e^{-\alpha x}$

Riscrivendo: $\phi_1(x) = \frac{A}{ik - \alpha} [(ik - \alpha)e^{ikx} + (ik + \alpha)e^{-ikx}]$ che vale:

$e^{\pm ikx} = \cos(kx) \pm i \sin(kx)$ $\phi_1(x) = \frac{2ik}{ik - \alpha} A \left[\cos(kx) - \frac{\alpha}{k} \sin(kx) \right]$

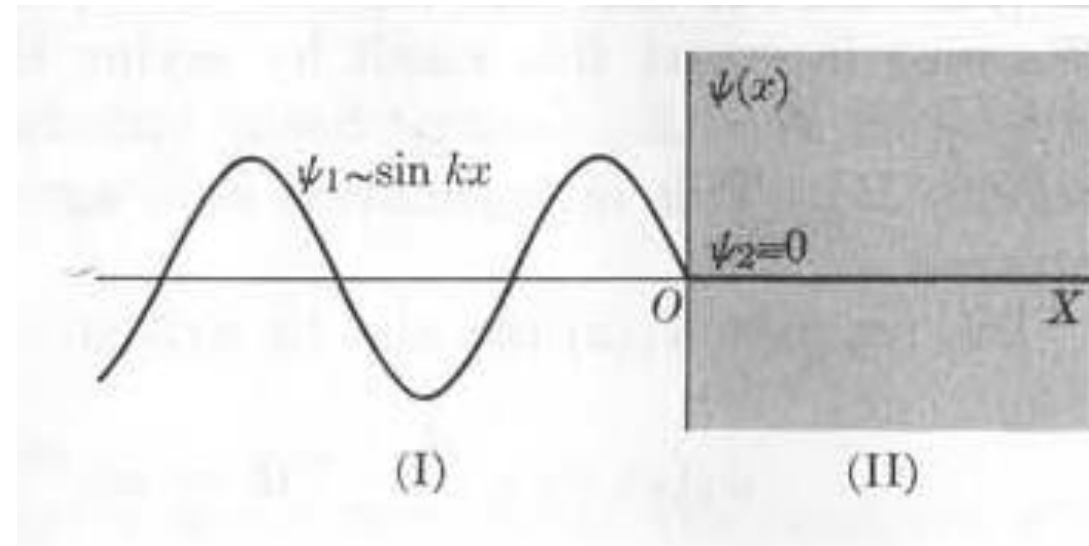
Le funzioni ϕ_1 e ϕ_2 (a meno del termine complesso $2ik/(ik-a)$) sono rappresentate in figura .



Osserviamo che più grande è il fattore U_0 rispetto all'energia della particella, più grande è il valore di α e più velocemente la funzione ϕ_2 va a zero per $x > 0$.

Nel limite di $U_0 \rightarrow \infty$ la funzione ϕ_2 va a zero e la particella non può penetrare nella regione II: tutte le particelle vengono riflesse in $x = 0$.

In questo caso l'espressione di ϕ_1 diviene:
$$\phi_1(x) = 2iA \operatorname{sen}(kx) = C \operatorname{sen}(kx)$$



B. L'energia della particella è maggiore del gradino : $\varepsilon > U_0$

Classicamente la particella può superare la barriera ed entrare nella regione II, ad $x = 0$ soffre di una decelerazione dato che la sua energia cinetica diviene più piccola.

Dal punto di vista quantistico la soluzione nella regione I è sempre data da:

$$\phi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx},$$

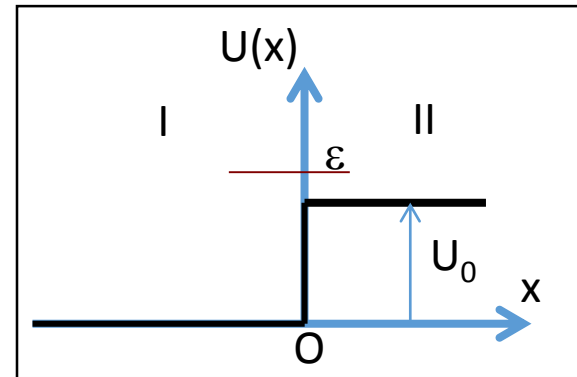
assumendo che parte delle particelle possano venire riflesse. Per la regione II, definendo:

$$k'^2 = \frac{2m(\varepsilon - U_0)}{\hbar^2}$$

l'equazione di Schroedinger è:

$$\frac{d^2 \phi_{II}}{dx^2} + k'^2 \phi_{II} = 0$$

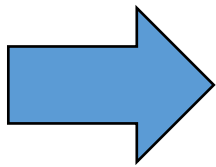
con soluzione $\phi_{II}(x) = Ce^{ik'x}$ (rappresenta la particella che viaggia verso destra).



Applicando le condizioni al contorno a $x = 0$ abbiamo:

$A + B = C$ e $k(A-B) = k'C$, le cui soluzioni sono :

$$B = \frac{(k - k')A}{k + k'} \qquad C = \frac{2kA}{k + k'}$$



$$\phi_I(x) = A \left(e^{ikx} + \frac{k - k'}{k + k'} e^{-ikx} \right); \qquad \phi_{II}(x) = \frac{2k}{k + k'} A e^{ik'x}.$$

Il fatto che B non sia nullo indica che alcune particelle sono riflesse, un risultato diverso da quello della meccanica classica.

Questo fenomeno e' caratteristico dei campi che, nella loro propagazione, incontrano una regione di discontinuità nelle proprietà fisiche del mezzo: un fatto ben noto nel caso per esempio di onde elastiche o elettromagnetiche.

6. Penetrazione di una barriera di potenziale - Effetto Tunnel

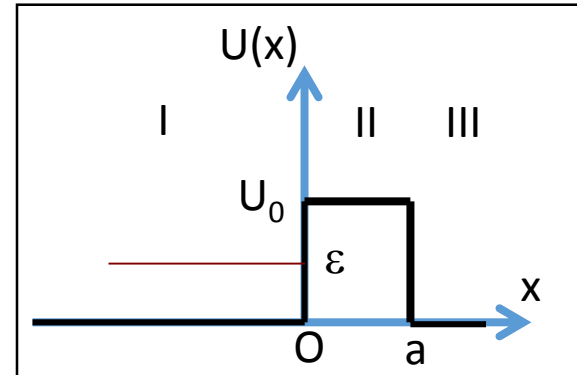
Consideriamo la barriera di potenziale di altezza U_0 e spessore a .

Per $\varepsilon < U_0$ avremo soluzioni del tipo:

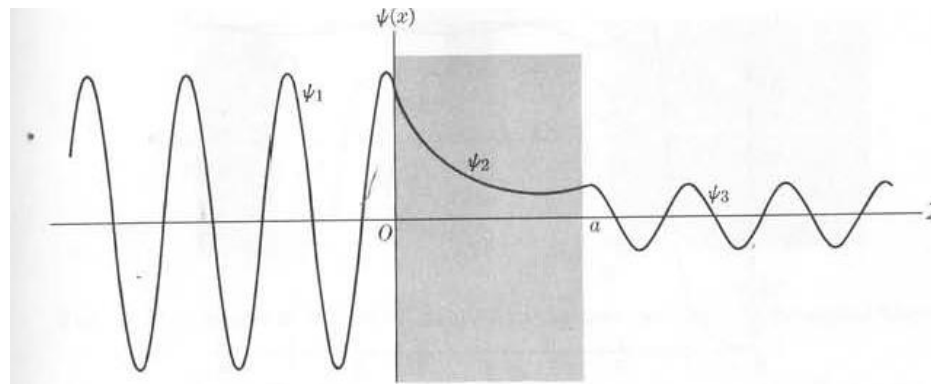
$$\phi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

$$\phi_{II}(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$$

$$\phi_{III}(x) = A'e^{ik'x}$$

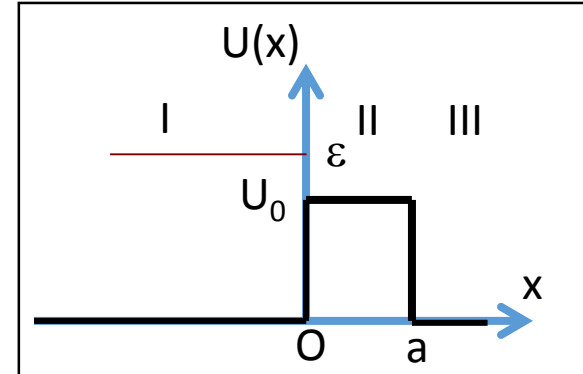


Dove k , α e k' hanno significato dato precedentemente. La forma d'onda è come in figura. E' quindi possibile che la particella con energia inferiore a U_0 penetri la barriera (onda ϕ_3).



Applicando le condizioni al contorno a $x = 0$ ed $x = a$ possiamo determinare i coefficienti A, B, C, D, A' .

Per $\varepsilon > U_0$ la descrizione classica indicherebbe che tutte le particelle vengono trasmesse oltre la barriera. In meccanica quantistica invece, come per il gradino di potenziale, **alcune particelle possono essere riflesse ad $x = 0$ ed $x = a$** . Quindi le funzioni d'onda sono:

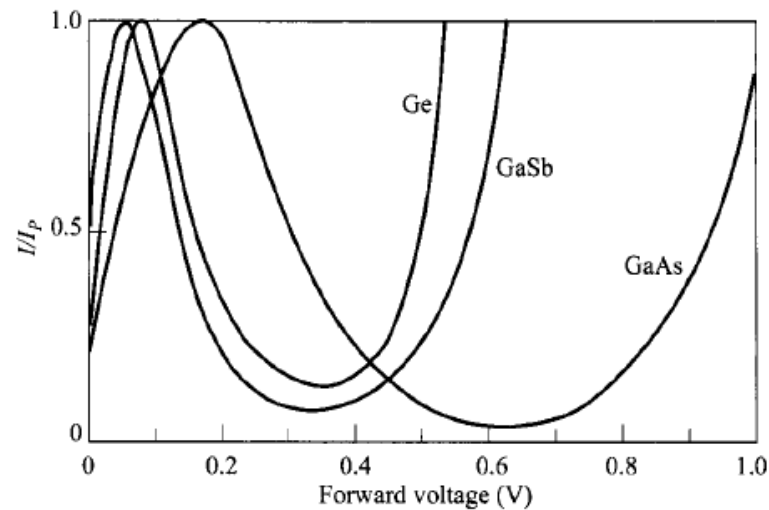
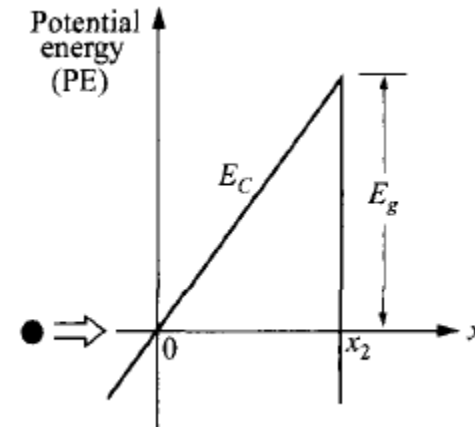
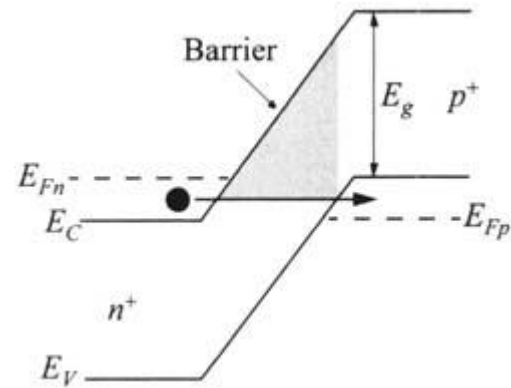


$$\phi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad \phi_{II}(x) = Ce^{ik'x} + De^{-ik'x} \quad \phi_{III}(x) = A'e^{ikx}$$

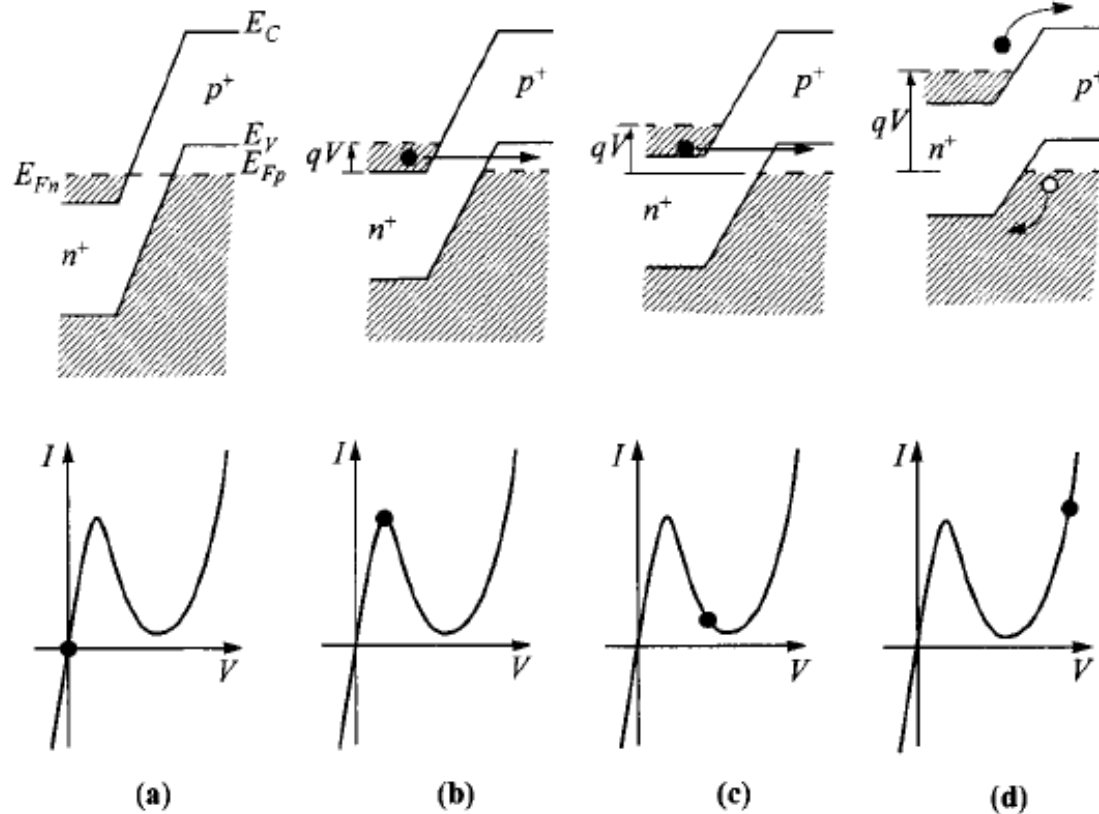
Applicando le condizioni al contorno a $x = 0$ ed $x = a$ possiamo determinare i coefficienti A, B, C, D, A' . La trasmissione della barriera è quindi valutata come : $T = |A'|^2 / |A|^2$

Esempio: diodo tunnel

Scoperto da L. Esaki nel 1958 (Ph.D. dissertation work). Come anomalia della curva I-V di una giunzione p-n in cui tutte e due le regioni n e p sono degeneri. In questo caso il tunneling può essere analizzato considerando una barriera di potenziale triangolare.



(a) equilibrio
 (b) tensione diretta : una banda di energia con stati occupati a destra della barriera si affianca ad una banda di stati non occupati a sinistra. Elettroni possono penetrare la barriera dal lato n a quello p producendo corrente di tunneling.



(c) incrementando la tensione diretta fino a che il minimo della banda di conduzione risulta pari al Massimo della banda di valenza. Non ci sono piu' stati disponibili occupati dagli elettroni che si affacciano a stati vuoti nella banda di valenza: la corrente di tunneling si riduce a zero.
 (d) corrente diretta dovuta a diffusione dei maggioritari senza tunneling;