

# Presentazione del corso Istituzioni di Algebra Superiore, a.a. 2017-18

## Il corso

Il corso propone **temi classici della teoria dei gruppi con focalizzazione sul caso finito**. E' comunque proposta una comparazione finito-infinito e sono analizzati in dettaglio i gruppi liberi, i ciclici infiniti e i diedrali infiniti.

I temi trattati sono, in sintesi:

- 1)** le varie tipologie di **prodotti di gruppi diretti e semidiretti** mostrando esplicite costruzioni soprattutto a partire da fattori gruppi ciclici. Gruppi diedrali.
- 2)** **gli automorfismi di gruppi** e lo studio dei gruppi notevoli da essi formati soprattutto come strumento per lo studio delle sezioni  $N_G(H)/C_G(H)$  dove  $H$  è un sottogruppo del gruppo  $G$ .
- 3)** **Gruppi di matrici a coefficienti in un campo**: matrici diagonali, triangolari e unitriangolari, cicli di Singer.
- 4)** **Serie di un gruppo**: serie di composizione e serie principali. Sottogruppi caratteristici, normali minimali e caratteristicamente semplici. Teorema di caratterizzazione dei gruppi finiti caratteristicamente semplici.
- 5)** **Gruppi risolubili finiti e serie derivate**. Commutatori e calcolo con essi. Descrizione della classe dei risolubili.
- 6)** **Azione di un gruppo  $G$  su un insieme** o su un altro gruppo.
  - a) *Generalità* (orbite, Fix, lemma di Burnside...)
  - b) *Applicazioni in teoria dei gruppi* (centro di un  $p$ -gruppo, numero di coniugati di un sottogruppo, normalità di un sottogruppo di indice  $p$  in un gruppo  $G$  se  $p$  è il minimo divisore primo dell'ordine di  $G$ , classificazione dei gruppi di ordine  $pq$  con  $p, q$  primi etc...)
  - c) *Proprietà dei Sylow* di sottogruppi e quozienti
  - d) *Azioni e riconoscimento di gruppi semplici* con particolare riferimento all'alternato e a  $PSL(n,q)$ .
  - e) *Applicazioni delle azioni ad aspetti di teoria delle scelte sociali*. Questo è un tema piuttosto inconsueto di cui mi sto occupando a livello di ricerca in collaborazione con un collega ad Economia e mi fa piacere presentarlo agli studenti anche come tema di possibili tesi.
- 7)** **Gruppi di permutazione**: transitività multipla, regolarità e semiregolarità.
- 8)** **Gruppi liberi**. Costruzione di gruppi liberi, Isomorfismo di gruppi liberi su insiemi di uguale cardinalità. Teorema della forma normale. Concetto di rango. Presentazioni e relazioni per gruppi: il caso del gruppo simmetrico. Gruppi liberi in natura e loro riconoscimento. Lemma del ping pong.
- 9)** **Gruppi nilpotenti**. Serie centrale discendente e ascendente. Proprietà tipiche dei nilpotenti. Caratterizzazione nel caso finito. Quaternioni e quaternioni generalizzati. Teorema di Dedekind (gruppi in cui ogni sottogruppo è normale).

## Prerequisiti

Appare chiaro dalla descrizione del corso che prerequisiti siano i corsi di Algebra I e II. Gli argomenti verranno rapidamente ripresi per cui non è necessario sicuramente ricordarsi in dettaglio i teoremi e tantomeno le loro dimostrazioni ma è importante che si abbiano le conoscenze di base su gruppi anelli e campi.

## Il metodo di lavoro

Mi auguro sempre un forte scambio di opinioni con gli studenti in modo da allontanare un approccio passivo alle lezioni. A tale scopo, consapevole del fatto che essere "creativi" durante le lezioni sia tutt'altro che facile, **assegno periodicamente esercizi** che poi vengono rivisti in classe e svolti dagli studenti sotto la mia supervisione. E' poi prevista una attivita' seminariale autogestita dagli studenti (sotto la mia supervisione) in cui sia possibile presentare argomenti a cui si e' particolarmente interessati.

**Dove studiare.** Gli argomenti trattati possono essere studiati, oltreché sugli appunti presi a lezione, sulle **dispense del Prof. C. Casolo** che costituiscono il riferimento principale. Su alcuni argomenti suggerisco via via anche l'utilizzo di alcuni testi.

**Come studiare.** Utilizzo una pagina e-l per garantire tempestive comunicazioni con voi e rendere disponibile il materiale che via via si rende necessario. Quest'anno la password è frobenius19.

## L'esame

L'esame è **orale ma prevede lo svolgimento di un esercizio** che risulta da una leggera variazione di uno degli esercizi svolti in classe.