Materiale propedeutico

Matematica con Esercitazioni

Corso di Laurea in Scienze Geologiche

Prof. Lorenzo Fusi

9 settembre 2017

Indice

0.1 Notazione

Introduciamo i seguenti insiemi

$$\mathbb{N}_O = \{0, 1, 2, 3, ...\}, \qquad \text{(naturali)} \tag{1}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\} \qquad \text{(interi)} \tag{2}$$

$$\mathbb{Q} = \{ \ x = \frac{m}{n}, \quad \text{tali che} \quad n, \ m \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{(razionali)} \tag{3}$$

Possiamo immediatamente osservare la relazione $\mathbb{N}_O \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. I numeri che noi utilizzeremo sono i cosiddetti numeri reali $\mathbb{R}$, la cui definizione rigorosa è assai complessa e oltre gli scopi di questo corso. In maniera non formale li possiamo descrivere semplicemente come i numeri ai quali possibile attribuire uno sviluppo decimale infinito che non rientrano fra i numeri razionali. La caratteristica che ce li fa comprendere facilmente è quella per cui i numeri reali possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta, detta retta numerica o retta reale (vedi Fig. 0.1).

I numeri reali sono ordinati fra di loro, ossia esiste una relazione tale che, dati due numeri $a, \ b \in \mathbb{R}$ posso dire se $a > b$ oppure $a < b$ oppure $a = b$. Di seguito faremo uso anche della seguente notazione (intervalli aperti, chiusi, semiaperti)

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ : a \leqslant x \leqslant b\}$$

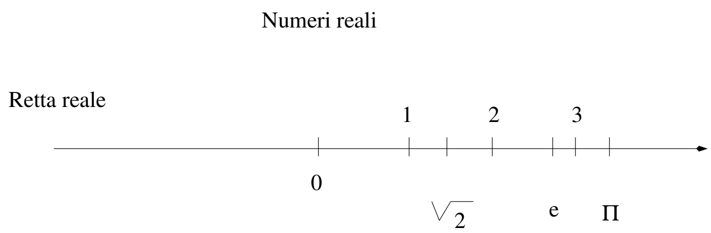

Figura 1: Schema corrispondenza numeri reali e retta

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \ : a < x \leqslant b\}$$
$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \ : a \leqslant x < b\}$$
$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \ : a < x < b\}$$

Utilizzeremo anche il simbolo $\pm\infty$, che non indica un numero ma una quantità infinitamente grande (∞) o infinitamente piccola ($-\infty$). In queso modo possiamo definire le semirette

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \ : x \leqslant a\}$$

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \ : x \geqslant a\}$$

Utilizzeremo anche i seguenti simboli

- $\forall$, “per ogni”
- $\neq$, “diverso”
- $\in$, “appartiene”
- $\notin$, “non appartiene”
- $\cup$ “unione”
- $\cap$ “intersezione”
- $\exists$ “esiste”
- $\nexists$ “non esiste”
- $\Longleftrightarrow$ “se e solo se”
- $\subseteq$ “contenuto o uguale”
- $\supseteq$ “contiene o uguale”
- $\oslash$ “insieme vuoto”

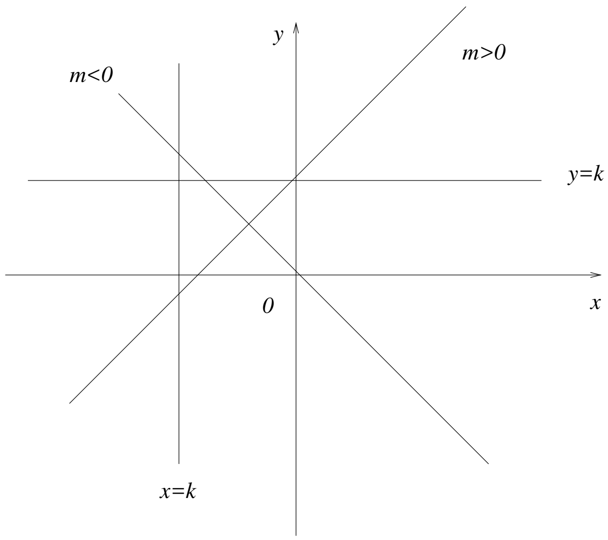

Figura 2: Esempi di rette nel piano

0.2 Equazione di primo grado e retta

Una equazione di primo grado è un oggetto del tipo

$$ax + b = 0, \qquad a,\ b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0. \tag{4}$$

La sua soluzione è

$$x = -\frac{b}{a}, \tag{5}$$

infatti sostituendo (5) in (4) si ottiene l'identità $0 = 0$. La rappresentazione nel piano cartesiano della relazione di primo grado è una *retta*, vedi Fig. 0.2. Consideriamo l'espressione

$$ax + by + c = 0. \tag{6}$$

Questa è una relazione *lineare* tra x e y, dove $a,\ b \in \mathbb{R}$ e $(a, b) \neq (0, 0)$. Geometricamente rappresenta una linea nel piano cartesiano xOy. Disegnare una retta nel piano partendo dalla sua equazione è molto semplice; infatti basta costruire una tabella in cui si scelgono a caso due valori x_1 e x_2 e si calcolano i corrispondenti valori y_1, y_2 tramite la (6)

x	y
x_1	$y_1 = -\frac{a}{b}x_1 - \frac{c}{b}$
x_2	$y_2 = -\frac{a}{b}x_2 - \frac{c}{b}$

Unendo i punti di coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2) nel piano si ottiene la retta data, vedi Fig. 3. Chiaramente i coefficienti a, b non possono essere contemporaneamente nulli. Un modo analogo di rappresentare la retta nel piano è la seguente

$$y = mx + q, \tag{7}$$

detta anche forma esplicita. Chiaramente il passaggio da una forma all'altra è ottenuto mediante le formule

$$m = -\frac{a}{b}, \qquad q = -\frac{c}{b}. \tag{8}$$

Il parametro m si dice *coefficiente angolare*, mentre q è detta *intercetta*. Il vantaggio della forma (6) rispetto alla (7) è che nella prima possono essere rappresentate anche rette parallele all'asse delle y (asse delle ordinate).

- Le rette parallele all'asse delle x sono della forma $y = k$
- Le rette parallele all'asse delle y sono della forma $x = k$
- Se $m > 0$ la retta ha direzione sud-ovest/nord-est
- Se $m < 0$ la retta ha direzione sud-est/nord-ovest
- Il punto $(0, q)$ è quello in cui la retta incontra l'asse delle y $(x = 0)$.

Dati due punti il coefficiente angolare è il rapporto fra la differenza delle ascisse e delle ordinate (vedi Fig. 3)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{9}$$

Questo vale indipendentemente dai punti scelti. Le equazioni delle *bisettrici* dei quadranti sono $y = \pm x$. La generica equazione di una retta passante per un punto $P_o \equiv (x_o, y_o)$ di coefficiente m è

$$y - y_o = m(x - x_o). \tag{10}$$

Date due rette

$$\begin{cases} y = m_1 x + q_1, \\ \\ y = m_2 x + q_2 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \\ \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases} \tag{11}$$

si ha che queste sono *parallele* se

$$m_1 = m_2 \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \tag{12}$$

mentre sono perpendicolari se

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0. \tag{13}$$

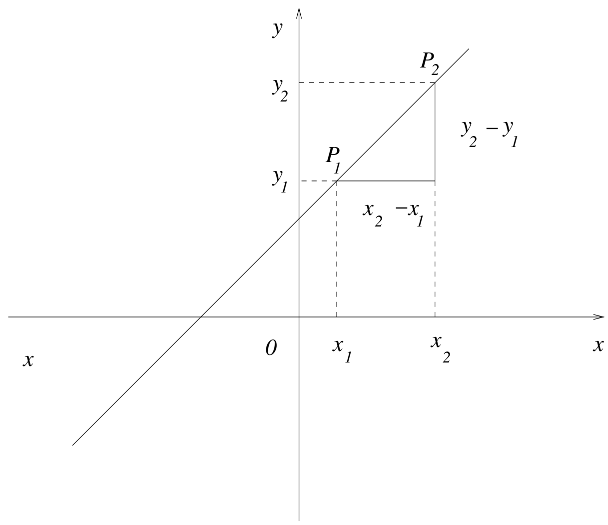

Figura 3: Il coefficiente angolare di una retta.

La distanza di un punto $P_o \equiv (x_o, y_o)$ da una retta r di equazione (6) è data (non lo dimostriamo) da

$$d(P_o, r) = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{14}$$

Date due rette non parallele

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \\ \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases} \tag{15}$$

queste si intersecano nel punto

$$x = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \qquad y = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \tag{16}$$

0.3 Equazione di secondo grado e parabola

Una equazione di secondo grado è data da

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a,\ b,\ c,\ \in \mathbb{R}, \qquad a \neq 0. \tag{17}$$

L'esistenza delle sue soluzioni è legata al cosiddetto *discriminante* $\Delta = b^2 - 4ac$. In particolare se $\Delta > 0$ le soluzioni sono due, reali e distinte (la verifica di queste formule è molto semplice e lasciata al lettore)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}. \tag{18}$$

Se $\Delta = 0$ si ha una sola soluzione (o due coincidenti)

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}. \tag{19}$$

Se $\Delta < 0$ non si hanno soluzioni reali. È facile osservare che (anche qui la verifica è lasciata al lettore) se $\Delta > 0$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \tag{20}$$

cosicché l'equazione (17) puó essere riscritta come il prodotto di due fattori lineari. Infatti

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0, \tag{21}$$

$$x^2 - (x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 = 0, \tag{22}$$

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0. \tag{23}$$

La relazione

$$y = ax^2 + bx + c \tag{24}$$

rappresenta una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate nel piano xOy, Fig. 4. Geometricamente la parabola puó anche essere definita come *il luogo dei punti equidistanti da un punto detto <u>fuoco</u> e da una retta detta <u>direttrice</u>*[1]. Nel caso in cui l'asse di simmetria sia parallelo all'asse delle x l'equazione della parabola assume la forma

$$x = ay^2 + by + c. \tag{25}$$

Data una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle y le coordinate del vertice e del fuoco sono

$$V \equiv \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right), \qquad F \equiv \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right). \tag{26}$$

L'equazione della retta direttrice e dell'asse di simmetria di tale parabola sono

$$y = -\frac{1+\Delta}{4a}, \qquad x = -\frac{b}{2a}. \tag{27}$$

Il parametro a determina la <u>concavità</u> ($a < 0$) o la <u>convessità</u> ($a > 0$) della parabola e la sua apertura ($a \ll 1$ parabola molto aperta, $a \gg 1$ parabola molto stretta). Il parametro b misura lo scostamento rispetto all'asse $x = 0$ (se $b = 0$ la parabola è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate), mentre il punto $(0, c)$ rappesenta l'intersezione con l'asse delle ordinate.

L'intersezione della parabola con l'asse delle x si ottiene mettendo a sistema la (24) con $y = 0$, ossia scrivendo la (17). L'esistenza delle intersezioni si ha a seconda del valore del discriminante. In Fig. 5 sono rappresentate le varie

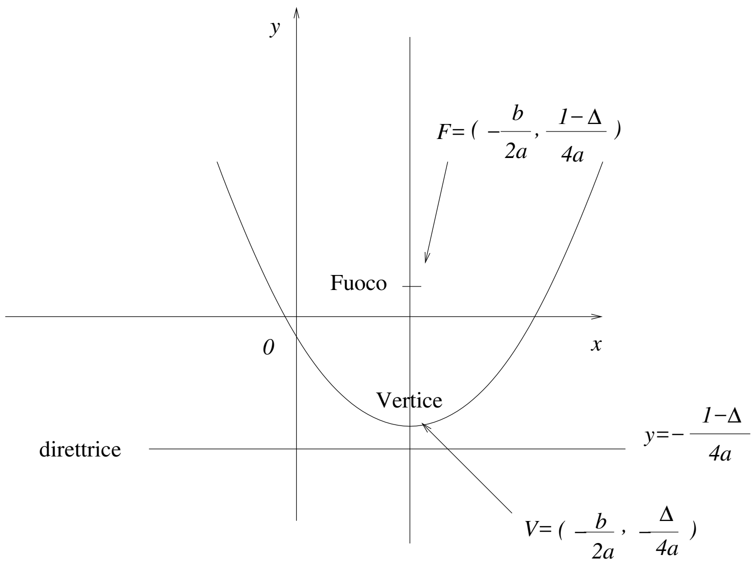

Figura 4: La parabola.

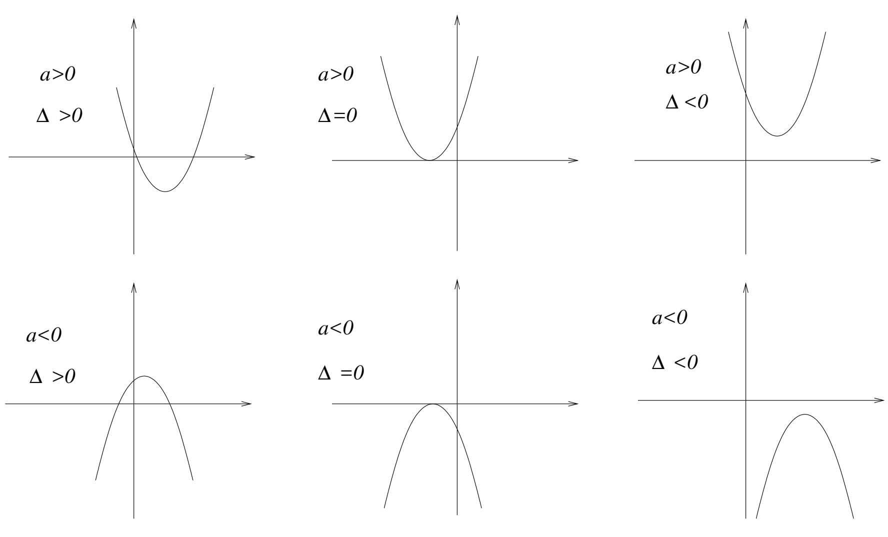

Figura 5: Intersezione con l'asse delle x.

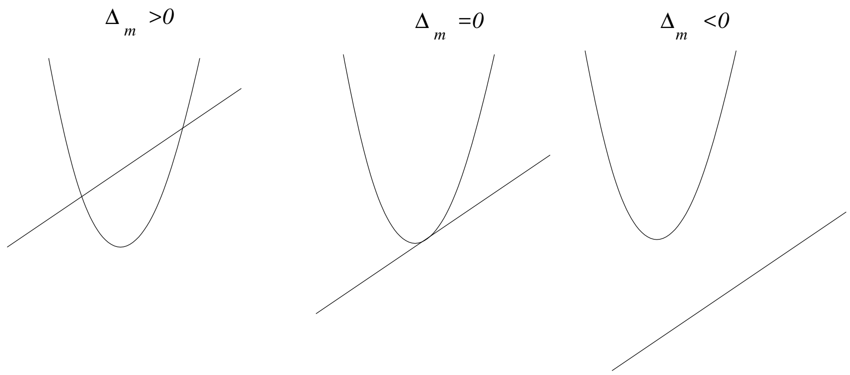

Figura 6: Intersezione retta parabola.

possibilità a seconda del segno di Δ. In generale, data una retta ed una parabola si possono verificare tre situazioni:

i) retta e parabola si intersecano in 2 punti

ii) retta e parabola sono tangenti

iii) retta e parabola non si intersecano

Infatti mettendo a sistema

$$\begin{cases} y = mx + q, \\ y = ax^2 + bx + c, \end{cases} \tag{28}$$

si ottiene

$$ax^2 + (b - m)x + (c - q) = 0 \tag{29}$$

I tre casi corrispondono a (vedi Fig. 6)

$$\Delta_m = (b-m)^2 - 4a(c-q) \begin{cases} > 0, & \text{Retta e parabola si intersecano in due punti} \\ = 0, & \text{Retta e parabola sono tangenti} \\ < 0 & \text{Retta e parabola non si intersecano} \end{cases} \tag{30}$$

0.4 Circonferenza

La circonferenza è il luogo dei punti (x, y) equidistanti da un punto detto il centro $\mathcal{C} \equiv (x_o, y_o)$. La sua equazione si ottiene mediante il *teorema di Pitagora*

[1]Descrivendo infatti il luogo dei punti (x, y) equidistanti da un punto dato $P \equiv (x_o, y_o)$ e da una retta (parallela all'asse delle x) $y = d$ si ottiene una espressione del tipo (24).

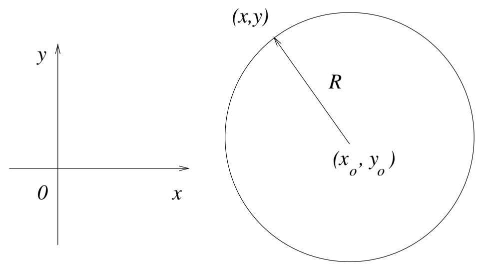

Figura 7: Circonferenza.

imponendo

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2, \tag{31}$$

dove R è il raggio della circonferenza, si veda la Fig. 7. Sviluppando la (31) si ottiene

$$x^2 + y^2 - 2x_o x - 2y_o y + x_o^2 + y_o^2 - R^2 = 0. \tag{32}$$

Ponendo

$$a = -2x_o, \qquad b = -2y_o, \qquad c = x_o^2 + y_o^2 - R^2, \tag{33}$$

si ha

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0. \tag{34}$$

Di conseguenza l'equazione (34) rappresenterà una circonferenza di centro

$$x_o = -\frac{a}{2}, \qquad y_o = -\frac{b}{2}, \tag{35}$$

e di raggio

$$R = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}. \tag{36}$$

Ovviamente dovremo verificare che la quantità sotto radice sia strettamente positiva, altrimenti o la circonferenza non esiste o è ridotta ad un punto. Per quanto riguarda l'intersezione di una retta con la circonferenza si possono ripetere gli stessi ragionamenti fatti nel caso della parabola, mettendo a sistema l'equazione della circonferenza con quella della parabola. Anche in questo caso potremo avere intersezione in due punti, tangenza o assenza di intersezione.

0.5 Disequazioni di grado I e II

Le disequazioni di grado I sono date da

$$ax + b \begin{cases} < 0, \\ > 0, \\ \geqslant 0, \\ \leqslant 0. \end{cases} \tag{37}$$

Se supponiamo che $a > 0$ la soluzione chiaramente è data da

$$x \quad \begin{cases} < -ba^{-1}, \\ > -ba^{-1}, \\ \geqslant -ba^{-1}, \\ \leqslant -ba^{-1}. \end{cases} \tag{38}$$

Se $a < 0$ le disuguaglianze nella (38) vanno rovesciate ossia

$$x \quad \begin{cases} > -ba^{-1}, \\ < -ba^{-1}, \\ \leqslant -ba^{-1}, \\ \geqslant -ba^{-1}. \end{cases} \tag{39}$$

L'inversione delle diseguaglianze avviene poiché per ottenere la soluzione con $a < 0$ la diseguaglianza è stata divisa per il numero negativo a e <u>quando si divide una diseguaglianza per un numero negativo la diseguaglianza va rovesciata</u>.

Per quanto riguarda le disequazioni di grado II queste sono date da

$$ax^2 + bx + c \quad \begin{cases} < 0, \\ > 0, \\ \geqslant 0, \\ \leqslant 0. \end{cases} \tag{40}$$

Per la risoluzione di tali disequazioni possiamo aiutarci con la rappresentazione grafica della parabola. A titolo di esempio infatti supponiamo di voler risolvere la generica disequazione

$$ax^2 + bx + c < 0 \tag{41}$$

Risolverla con il metodo grafico significa cercare nella rappresentazione grafica della parabola quelle x per cui il corrispettivo y dato dalla formula

$$y = ax^2 + bx + c < 0 \tag{42}$$

sia effettivamente negativo. Dobbiamo cioé cercare quelle x cui corrispondono rami di parabola che si trovano nel semipiano $y < 0$, si veda la Fig. 8. Il caso in figura mostra due parabole ($a > 0$ e $a < 0$) entrambe con $\Delta > 0$ (2 intersezioni). La soluzione della (41) è data dalle x per cui il valore $y = ax^2 + bx + c < 0$. Per cui

$$\text{caso} \quad a > 0 \qquad \text{soluzione} \qquad \in \{x_1 < x < x_2\}, \tag{43}$$

$$\text{caso} \quad a < 0 \qquad \text{soluzione} \qquad \{x > x_2\} \cup \{x < x_1\}. \tag{44}$$

Ragionando in questo modo possiamo costruirci una tabella per la risoluzione delle equazioni di grado II. Ci limitiamo a esporre i risultati con le disuguaglianze strette, i casi con le disuguaglianze deboli ($\geqslant$ e $\leqslant$) sono lasciate per esercizio al

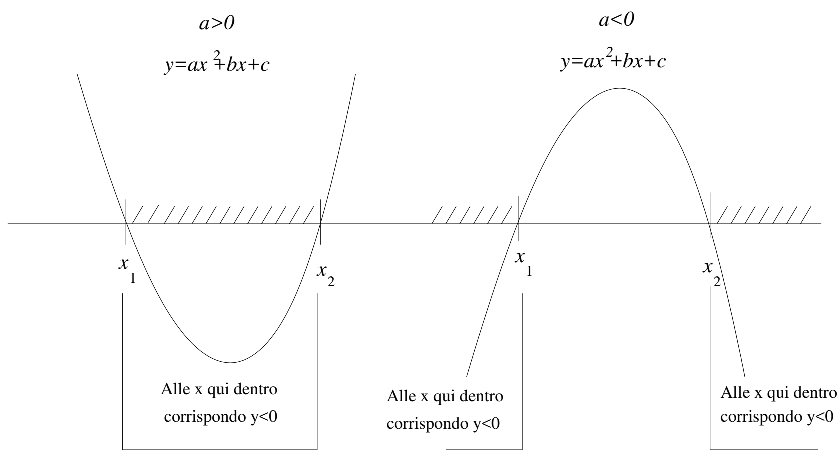

Figura 8: Disequazione di grado II.

lettore.

$$ax^2+bx+c<0 \quad \begin{cases} \Delta>0 \quad a>0 \quad x_1<x<x_2 \\ \Delta>0 \quad a<0 \quad x>x_2 \;\; x<x_1 \\ \Delta=0 \quad a>0 \quad \text{Mai} \\ \Delta=0 \quad a<0 \quad x\neq x_2=x_1 \\ \Delta<0 \quad a>0 \quad \text{Mai} \\ \Delta<0 \quad a<0 \quad \forall\, x\in\mathbb{R} \end{cases} \tag{45}$$

mentre

$$ax^2+bx+c>0 \quad \begin{cases} \Delta>0 \quad a>0 \quad x>x_2 \;\; x<x_1 \\ \Delta>0 \quad a<0 \quad x_1<x<x_2 \\ \Delta=0 \quad a>0 \quad x\neq x_2=x_1 \\ \Delta=0 \quad a<0 \quad \text{Mai} \\ \Delta<0 \quad a>0 \quad \forall\, x\in\mathbb{R} \\ \Delta<0 \quad a<0 \quad \text{Mai} \end{cases} \tag{46}$$

Osserviamo che ogni volta che l'equazione di grado II è scomponibile nel prodotto di due fattori di grado I (vedi (23)), la disequazione può essere risolta studiando il segno dei singoli fattori. Ad esempio se vogliamo studiare la

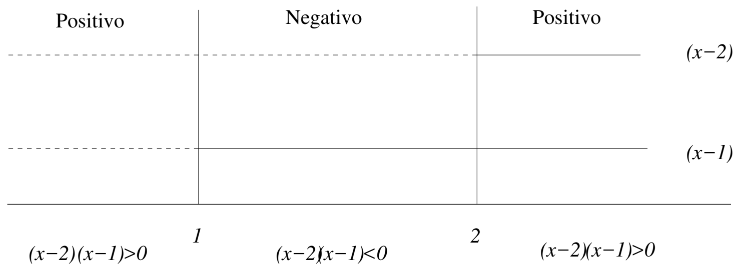

Figura 9: Disequazione $x^2 - 3x + 2 < 0$

disequazione

$$x^2 - 3x + 2 < 0, \tag{47}$$

che ha $\Delta = 1 > 0$ e dunque è scomponibile nel prodotto di due fattori lineari, osserviamo che

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 2) \cdot (x - 3). \tag{48}$$

Studiando i segni di $(x - 2)$ e $(x - 3)$ (si veda la Fig. 9) possiamo determinare il segno do $x^2 - 3x + 2$. Per quelle x tali che i due fattori sono concordi (stesso segno + o −) l'espressione $x^2 - 3x + 2$ sarà positiva. Dove i due fattori sono discordi (segno diverso) l'espresisone $x^2 - 3x + 2$ sarà negativa. Il segno della (48) è dunque stabilito dai segni dei singoli fattori di grado I. Con il metodo illustrato in Fig. 9 vediamo che la soluzione della disequazione è data da

$$1 < x < 2. \tag{49}$$

0.6 Il valore assoluto

Immaginiamo che $P(x)$ rappresenti una espressione (funzione) qualsiasi della x. La funzione valore assoluto si esprime dicendo che

$$|P(x)| = \begin{cases} P(x) & \text{dove } P(x) \geqslant 0, \\ \\ -P(x) & \text{dove } P(x) \leqslant 0. \end{cases} \tag{50}$$

Per come è definito il valore assoluto rappresenta sempre una quantità non negativa (ossia $\geqslant 0$). In pratica al posto di $|P(x)|$ utilizzeremo $P(x)$ per quelle x tali che $P(x) \geqslant 0$, mentre utilizzeremo $-P(x)$ per quelle x tali che $P(x) \leqslant 0$. In questo modo è chiaro che la quantità $|P(x)|$ non può mai essere negativa. A titolo di esempio consideriamo il valore assoluto della (48)

$$|P(x)| = |x^2 - 3x + 2| = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{dove } x^2 - 3x + 2 \geqslant 0, \\ \\ -(x^2 - 3x + 2) & \text{dove } x^2 - 3x + 2 \leqslant 0, \end{cases} \tag{51}$$

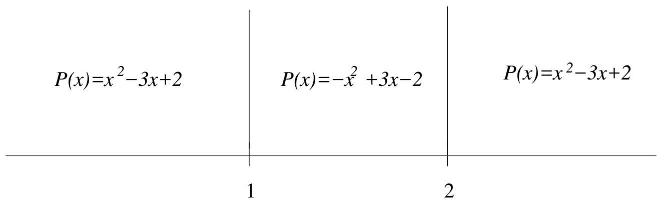

Figura 10: Valore assoluto di $P(x)$

Risolviamo le disuguaglianze di secondo grado osservando che

$$x^2 - 3x + 2 \geqslant 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \geqslant 2, \quad x \leqslant 1 \tag{52}$$

$$x^2 - 3x + 2 \leqslant 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 \leqslant x \leqslant 2. \tag{53}$$

Per cui possiamo scrivere

$$|x^2 - 3x + 2| = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & x \geqslant 2, \quad x \leqslant 1, \\ \\ -(x^2 - 3x + 2) & 1 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases} \tag{54}$$

Questo significa che per $x \geqslant 2$ o $x \leqslant 1$ si deve prendere $P(x) = x^2 - 3x + 2$, mentre quando $1 \leqslant x \leqslant 2$ si deve prendere $P(x) = -x^2 + 3x - 2$ come rappresentato nella figura Fig. 10.

0.7 La regola Di Ruffini

QUesta regola offre un metodo per decomporre un polinomio di grado superiore al secondo. Prendiamo un generico polinomio di grado n

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_o, \tag{55}$$

dove $a_j \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$. Supponiamo che $x = r$ sia una radice di $P(x)$, ossia $P(r) = 0$. Allora possiamo decomporre il polinomio nel seguente modo

$$P(x) = (x - r)(b_{n-1} x^{n-1} + ... b_1 x + b_o), \tag{56}$$

dove i coefficienti b_j possono essere determinati mediante la *regola di Ruffini*. Si crea una tabella del tipo

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	....	a_1	a_o
		$+$	$+$		$+$	$+$
r		$b_{n-1} r$	$b_{n-2} r$		$b_1 r$	$b_o r$
	$\underbrace{a_n}_{=b_{n-1}}$	$\underbrace{a_{n-1} + b_{n-1} r}_{=b_{n-2}}$	$\underbrace{a_{n-2} + b_{n-2} r}_{=b_{n-3}}$	....	$\underbrace{a_1 + b_1 r}_{=b_o}$	0

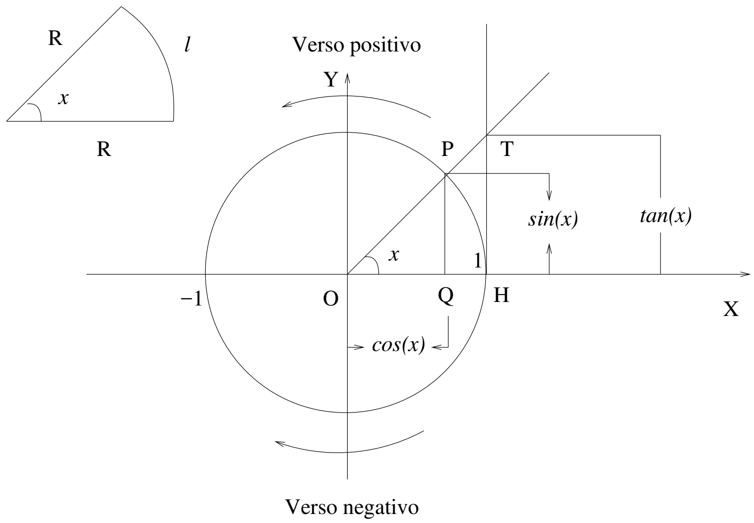

Figura 11: Il cerchio unitario per la definizione di $\sin x$ e $\cos x$.

Si trascina a_n nell'ultima riga e lo si rinomina b_{n-1}. Poi si moltiplica b_{n-1} per r e si somma ad a_{n-1} (nella seconda colonna) ottenendo il coefficiente $b_{n-2} = a_{n-1}+b_{n-1}r$. Si procede in questo modo fino all'ultima colonna dove si ottiene il coefficiente b_o. Chiaramente se r è radice del polinomio avremo che $a_o+b_or = 0$.

La regola di Ruffini in pratica ci permette di scomporre un polinomio di qualsiasi grado con radici intere (anche multiple) nel prodotto di fattori lineari e quadratici (irriducibili , ossia quelli con $\Delta < 0$). È un metodo molto utile per lo studio del segno di ppolinomi di grado superiore al secondo.

0.8 Richiami di trigonometria

Consideriamo un cerchio di raggio 1 di equazione $X^2 + Y^2 = 1$ nel piano XOY come quello mostrato in Fig. 11. Per convenzione un angolo $x > 0$ è rappresentato dalla porzione di spazio ottenuta facendo ruotare la semiretta delle x positive in senso antiorario. La misura dell'angolo in *radianti* è data dal rapporto fra l'arco di circonferenza descritto e il raggio. Per un generico cerchio (si veda la figura in alto a sinistra della 11)

$$x = \frac{l}{R} \tag{57}$$

Nel caso del cerchio di raggio 1 si ha ovviamente $x = l$. Osserviamo che la misura di una angolo è un numero puro (non ha dimensioni fisiche), essendo il rapporto fra due lunghezze. Dalla geometria euclidea sappiamo che la lunghezza di una circonferenza di raggio 1 è 2π, dove $\pi = 3,14159....$ è un numero reale irrazionale (ossia un numero reale che non si può esprimere come rapporto di due numeri interi). Per cui l'angolo *giro* risulta 2π, l'angolo *piano* π e l'angolo *retto* $\pi/2$. L'angolo può anche essere espresso in gradi sessagesimali (espressi con il simbolo ^{o}) dove sussiste la relazione

$$2\pi = 360\ ^o. \tag{58}$$

Per passare da gradi sessagesimali (x) a radianti (y) basta utilizzare la formula

$$y = \frac{2\pi}{360\ ^o}\ x, \tag{59}$$

mentre per passare da radianti (y) a gradi sessagesimali (x)

$$x = \frac{360\ ^o}{2\pi}\ y. \tag{60}$$

Con riferimento alla Fig. 11 immaginiamo che l'angolo sia descritto muovendo in senso antiorario il punto P lungo la circonferenza. Per definizione il seno e il coseno dell'angolo x non sono altro che le coordinate del punto P che si muove sulla circonferenza di raggio unitario, ossia

$$P \equiv (\cos x, \sin x). \tag{61}$$

Dal teorema di Pitagora otteniamo immediatamente l'identita fondamentale trigonometrica

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1. \tag{62}$$

Chiaramente la (62) comporta che

$$|\sin x| \leqslant 1, \qquad \Longleftrightarrow \qquad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{63}$$

$$|\cos x| \leqslant 1, \qquad \Longleftrightarrow \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{64}$$

La tangente dell'angolo x è definita come il rapporto fra $\sin x$ e $\cos x$ per cui

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}. \tag{65}$$

Il vocabolo "tangente" deriva dal fatto che, essendo i triangoli POQ e TOH simili, abbiamo

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{TH}}{1} = \overline{TH}, \tag{66}$$

e quindi la tangente di x è la lunghezza del segmento $\overline{TH}$ costruito prendendo appunto la *tangente* al cerchio unitario passante per il punto $(1, 0)$.
Osserviamo in base alla definizione (61) che

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
I Quadrante	>0	>0	>0
II Quadrante	>0	<0	<0
III Quadrante	<0	<0	>0
IV Quadrante	<0	>0	<0

dove i quadranti sono numerati procedendo in senso antiorario dal I (quello delle $x > 0$ e $y > 0$) in poi. Possiamo definire anche le reciproche delle funzioni trigonometriche, ossia la secante, la cosecante e la cotangente:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \tag{67}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}, \tag{68}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}. \tag{69}$$

Per alcuni angoli particolari possiamo determinare facilmente i valori delle funzioni trigonometriche e delle loro reciproche . Di seguito riportiamo una tabella con questi valori che possono essere ottenuti mediante ragionamenti di carattere puramente geometrico. Per gli angoli del I e II quadrante si ha

radianti	gradi	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\csc x$	$\sec x$	$\cot x$
0	0	0	1	0	$\pm\infty$	1	$\pm\infty$
$\pi/6$	30	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	2	$2/\sqrt{3}$	$3/\sqrt{3}$
$\pi/4$	45	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	$2/\sqrt{2}$	$2/\sqrt{2}$	1
$\pi/3$	60	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	2	$1/\sqrt{3}$
$\pi/2$	90	1	0	$\pm\infty$	1	$\pm\infty$	0
$2/3\pi$	120	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$-\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	-2	$-1/\sqrt{3}$
$3/4\pi$	135	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	$2/\sqrt{2}$	$-2/\sqrt{2}$	-1
$5/6\pi$	150	1/2	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$	2	$-2/\sqrt{3}$	$-3/\sqrt{3}$
π	180	0	-1	0	$\pm\infty$	-1	$\pm\infty$

Per gli angoli del III e VI quadrante si ha

radianti	gradi	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\csc x$	$\sec x$	$\cot x$
$7/6\pi$	210	-1/2	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	-2	$-2/\sqrt{3}$	$3/\sqrt{3}$
$7/4\pi$	225	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	1	$-2/\sqrt{2}$	$-2/\sqrt{2}$	1
$4/3\pi$	240	$-\sqrt{3}/2$	-1/2	$\sqrt{3}$	$-2/\sqrt{3}$	-2	$1/\sqrt{3}$
$3/2\pi$	270	-1	0	$\pm\infty$	-1	$\pm\infty$	0
$5/3\pi$	300	$-\sqrt{3}/2$	1/2	$-\sqrt{3}$	$-2/\sqrt{3}$	2	$-1/\sqrt{3}$
$7/4\pi$	315	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1	$-2/\sqrt{2}$	$2/\sqrt{2}$	-1
$11/6\pi$	330	-1/2	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$	-2	$2/\sqrt{3}$	$-3/\sqrt{3}$
2π	360	0	1	0	$\pm\infty$	1	$\pm\infty$

A titolo di esempio mostriamo il ragionamento per il calcolo delle funzioni trigonometriche per l'angolo $\pi/6 = 30\ ^o$. Con riferimento alla Fig. 12 osserviamo che il triangolo OPQ è la metà di un triangolo equilatero di lato 1. Per cui si ha

$$\overline{PQ} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \overline{OQ} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{70}$$

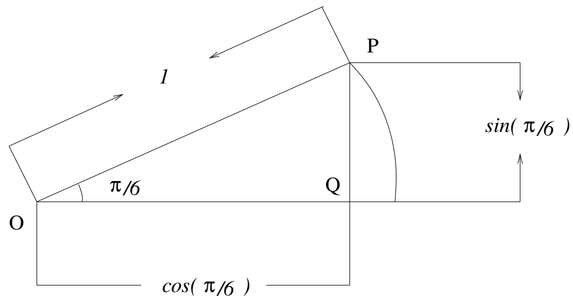

Figura 12: Ragionamento geometrico per il calcolo di $\sin(\pi/6)$ e $\cos(\pi/6)$.

mentre

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \tag{71}$$

Di conseguenza le funzioni trigonometriche reciproche risultano

$$\sec\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2, \qquad \csc\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}, \qquad \cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}, \tag{72}$$

Gli altri valori si trovano con ragionamenti analoghi. Nelle tabelle i valori $\pm\infty$ stanno a significare che la funzione trigonometrica è ottenuta dividendo per 0, per cui a seconda se consideriamo l'avvicinamento da dx o da sx (per chi ha familiarità con i limiti di funzione questo ragionamento risulterà più chiaro) al valore che annulla il denominatore otteniamo ∞ o $-\infty$.

I valori delle funzioni trigonometriche si possono calcolare anche considerando angoli negativi (quelli ottenuti partendo dall'angolo) e procedendo in senso orario). Per ottenere tabelle analoghe a quelle precedenti basta osservare che

$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \csc(-x) = -\csc x \qquad \text{funzioni dispari} \tag{73}$$

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \sec(-x) = \sec x \qquad \text{funzioni dispari} \tag{74}$$

$$\tan(-x) = -\tan x \qquad \cot(-x) = -\cot x \qquad \text{funzioni dispari} \tag{75}$$

Le funzioni trigonometriche inoltre sono *periodiche* ossia tali che

$$f(x+T) = f(x), \tag{76}$$

dove T è il periodo, ossia il più piccolo $T > 0$ per cui vale la (76). Il seno e il coseno (e le loro reciproche) sono periodiche di periodo 2π

$$\cos(x+2\pi) = \cos x \qquad \sec(x+2\pi) = \sec x, \tag{77}$$

$$\sin(x+2\pi) = \sin x \qquad \csc(x+2\pi) = \csc x, \tag{78}$$

mentre la tangente e la cotangente sono periodiche di periodo π

$$\tan(x+\pi) = \cos x \qquad \cot(x+\pi) = \cot x \tag{79}$$

Si possono dimostrare le seguenti

- *formule di addizione e sottrazione*

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x \tag{80}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin y \sin x \tag{81}$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \tag{82}$$

Assumendo $x = y$ e utilizzando il segno $+$ otteniamo le cosiddette

- *formule di addizione e sottrazione*

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x \tag{83}$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \tag{84}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}. \tag{85}$$

Dalle formule (62) e (84) si ha

$$2\cos^2 x - 1 = \cos 2x, \tag{86}$$

$$1 - 2\sin^2 x = \cos 2x, \tag{87}$$

per cui

$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} \tag{88}$$

$$\sin x = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} \tag{89}$$

$$\tan x = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}} \tag{90}$$

Sostituendo x con $x/2$ nelle (88)-(90) si ottengolo le

- *formule di bisezione*

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \tag{91}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \tag{92}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \tag{93}$$

Le rappresentazioni nel piano cartesiano delle funzioni trigonometriche $\sin x$, *cosx*, $\tan x$, $\sec x$, $\csc x$, $\cot x$ sono riportate nelle figure 13-18.

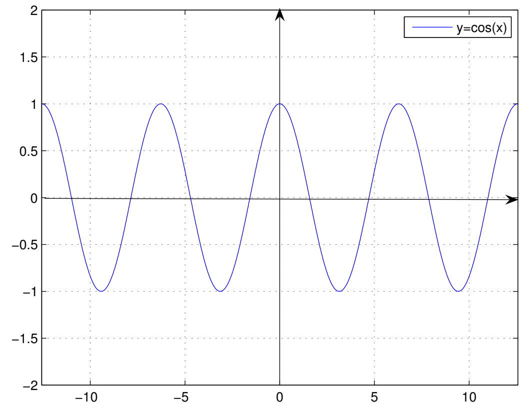

Figura 13: La funzione $y = \cos x$.

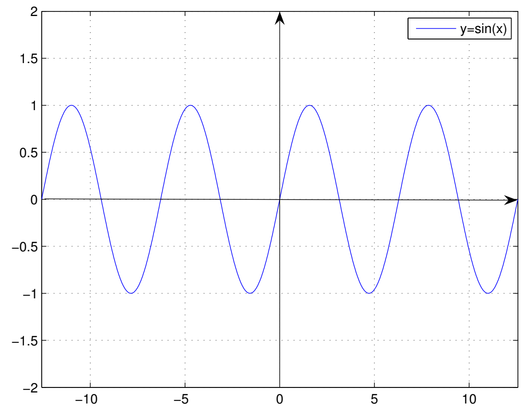

Figura 14: La funzione $y = \sin x$.

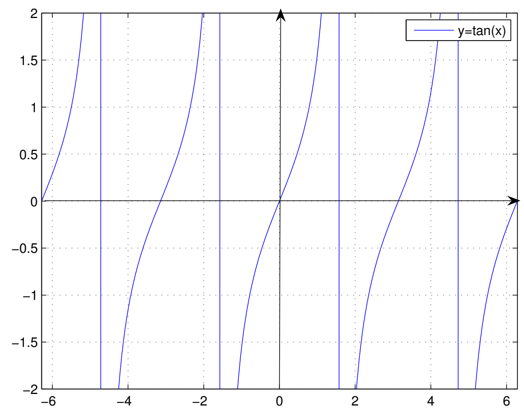

Figura 15: La funzione $y = \tan x$.

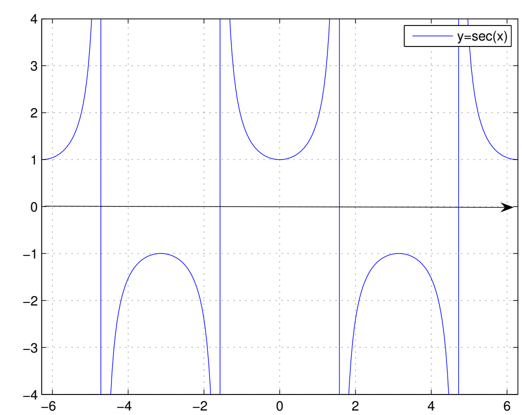

Figura 16: La funzione $y = \sec x$.

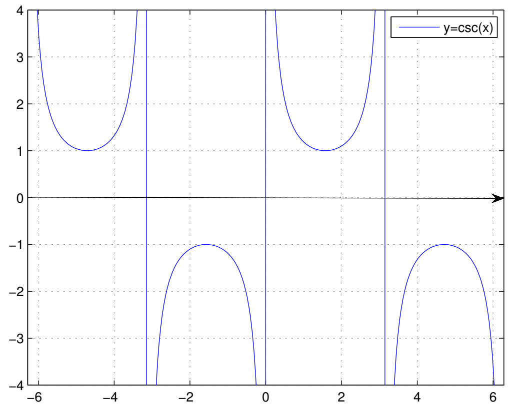

Figura 17: La funzione $y = \csc x$.

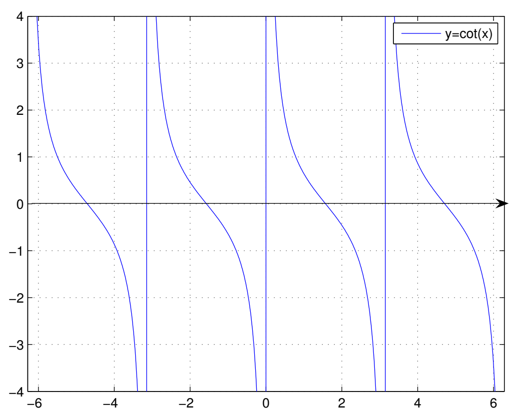

Figura 18: La funzione $y = \cot x$.

0.9 Esponenziali e logaritmi

Consideriamo un numero $a > 0$ con $a \neq 1$. Dato un numero $x > 0$ si definisce

$$y = \log_a x, \tag{94}$$

e si dice che $y \in \mathbb{R}$ è il logaritmo in base a di x se

$$x = a^y \tag{95}$$

Risulta chiaro ad esempio che

$$2 = \log_2 4, \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2^2 = 4 \tag{96}$$

$$3 = \log_2 8, \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2^3 = 8 \tag{97}$$

Dalla definizione risulta chiaro il motivo per cui dobbiamo avere $a > 0$ (non si può elevare un numero a ad un numero reale se $a < 0$). Inoltre risulta chiaro anche come mai dobbiamo scartare la base $a = 1$ (poiché altrimenti $x \equiv 1$) e come mai $x > 0$ ($a^y > 0$).

Dalle definizioni (94), (95) possiamo determinare una serie di proprietà dei logaritmi (sempre con $a > 0$, $a \neq 1$ e $x > 0$).

(1) $\log_a 1 = 0$;

(2) $\log_a a = 1$;

(3) $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$;

(4) $\log_a \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$;

(5) $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a x$;

(6) $a^{\log_a x} = x$;

(7) $\log_a(a^x) = x$;

(8) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$;

Tutte queste proprietà possono essere dimostrate mediante la definizione del logaritmo (le prime due si verificano banalmente). A titolo esemplificativo dimostriamo le proprietà (4) e (8) e lasciamo le altre come esercizio. Cominciamo col dimostrare la (4) definendo

$$y_1 = \log_a x_1, \qquad y_2 = \log_a x_2 \tag{98}$$

ossia

$$a^{y_1} = x_1, \qquad a^{y_2} = x_2. \tag{99}$$

Chiaramente
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a^{y_1}}{a^{y_2}} = a^{y_1 - y_2}. \tag{100}$$
Poniamo
$$\mathcal{L} = \log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a\left(a^{y_1-y_2}\right) \tag{101}$$
Allora, sempre per la definizione di logaritmo
$$a^{\mathcal{L}} = a^{y_1-y_2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{L} = y_1 - y_2, \tag{102}$$
ossia
$$\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2, \tag{103}$$
e quindi la (4) risulta dimostrata. Per dimostrare la (8) invece poniamo
$$y = \log_b x \qquad \Longleftrightarrow \qquad b^y = x. \tag{104}$$
Dalle proprietà (5) e (6) sappiamo che
$$a^{\log_a x} = x, \tag{105}$$
per cui
$$\log_b x = \log_b\left(a^{\log_a x}\right) = \log_a x \cdot \log_b a, \tag{106}$$
ossia la (8). Fra le varie basi possibili ce ne sono alcune molto particolari e molto usate. La prima è la base $a = 10$ (logaritmi decimali o di Briggs); i logaritmi in tale base si indicano genericamente con log senza specificare la base. L'altra base molto importante è la base e, dove e è il cosiddetto *numero di Nepero*
$$e = 2,71828....... \tag{107}$$
In questo caso il logaritmi si indicano nel seguente modo $y = \ln x$. In pratica
$$\log_{10}(..) = \log(..), \qquad\qquad \log_e(..) = \ln(..) \tag{108}$$
Per quanto riguarda la rappresentazione grafica dei logritmi dobbiamo distinguere i casi in cui la base $a \in (0,1)$ e $a > 1$, si vedano le Fig. 19, 20

Possiamo osservare che

- Per $a \in (0,1)$ la funzione logaritmo è *decrescente*, ossia
$$0 < x_1 < x_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \log_a x_1 > \log_a x_2 \tag{109}$$
- Per $a > 1$ la funzione logaritmo è *crescente*, ossia
$$0 < x_1 < x_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \log_a x_1 < \log_a x_2 \tag{110}$$

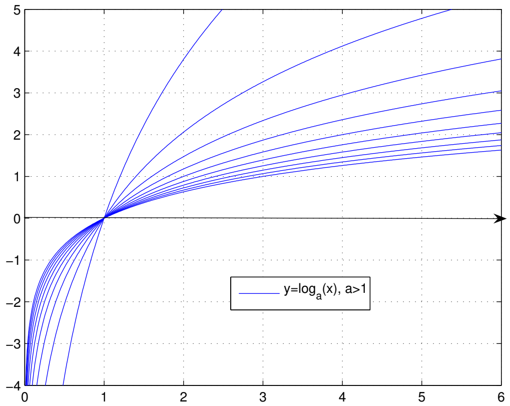

Figura 19: La funzione $y = \log_a(x), \quad a > 1$.

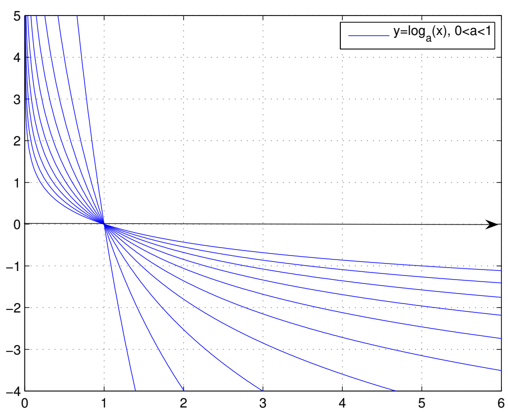

Figura 20: La funzione $y = \log_a(x), \quad a \in (0, 1)$.

A questo punto risulta semplice definire gli esponenziali sfruttando nuovamente le definizioni (94) e (95). Dato un numero $a > 0$ e $a \neq 1$ si dice esponenziale la funzione

$$y = a^x \tag{111}$$

Chiaramente per gli esponenziali esistono proprietà analoghe a quelle trovate per i logaritmi

(1) $a^0 = 1$;

(2) $a^1 = a$;

(3) $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$;

(4) $\dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1-x_2}$;

(5) $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$;

(6) $a^{\log_a x} = x$;

(7) $\log_a(a^x) = x$;

(8) $a^x = b^{(\log_b a)\cdot x}$;

Per definizione si è poi soliti indicare le potenze razionali come

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \tag{112}$$

Anche per gli esponenziali la base $e = 2,71828.......$ è una base molto importante. La funzione in questo caso è indicata con $y = e^x$ oppure anche come

$$y = \exp(x) \tag{113}$$

Nelle figure 21-22 riportiamo la rappresentazione grafica nel piano cartesiano delle funzioni esponenziali per $a \in (0,1)$ e $a > 1$. Anche qui possiamo osservare che

- Per $a \in (0,1)$ la funzione esponenziale è *decrescente*, ossia

$$0 < x_1 < x_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^{x_1} > a^{x_2} \tag{114}$$

- Per $a > 1$ la funzione esponenziale è *crescente*, ossia

$$0 < x_1 < x_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^{x_1} < a^{x_2} \tag{115}$$

La funzione esponenziale e la funzione logaritmo sono una l'inversa dell'altra, un pò come succede per le operazioni di estrazione di radice e elevamento di potenza. Questa relazione è espressa dal fatto

$$a^{\log_a x} = x, \qquad \log_a(a^x) = x \tag{116}$$

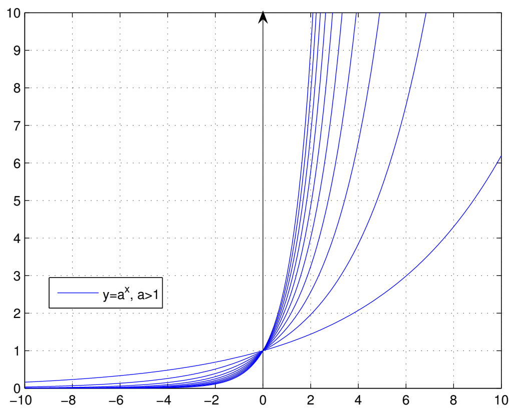

Figura 21: La funzione $y = a^x$, $\quad a > 1$.

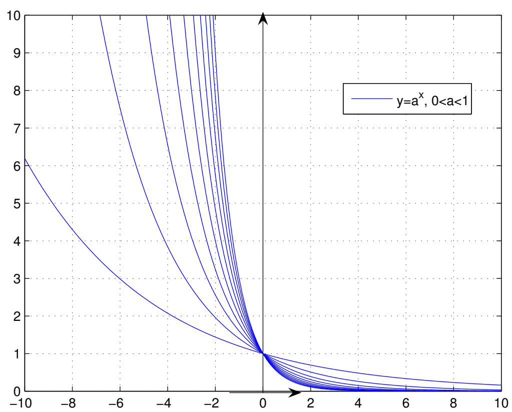

Figura 22: La funzione $y = a^x$, $\quad a \in (0, 1)$.