LEZIONE DEL 23 SETTEMBRE 2019

Dalla scorsa lezione:

- equazioni di Maxwell: $\bar{E}$ e $\bar{B}$ si propagano nel vuoto come onde con velocità $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ (in un mezzo trasparente $v = \frac{c}{n}$, n INDICE DI RIFRAZIONE)

- Se consideriamo $\bar{E}$ e $\bar{B}$ onde piane

$$\bar{E} = E_0 \cos(kx - \omega t)\,\bar{j}$$

le equazioni di Maxwell implicano che

- $k = \frac{\omega}{c} \longrightarrow \lambda \nu = c$ RELAZIONE DI DISPERSIONE
- $\bar{E}$ e $\bar{B}$ siano trasversi ($\perp$ alla direzione di propagazione)
- $\bar{B} \perp \bar{E}$
- $|\bar{B}| = |\bar{E}|/c$

- Polarizzazione: direzione del vettore $\bar{E}$

SORGENTI e RIVELATORI DI RADIAZIONE e-m NEL VISIBILE

Sorgenti:

materiali eccitati (riscaldati, ionizzati, ecc.) rilasciano energia sotto forma di radiazione

lampade ad incandescenza
gas ionizzati
LED (Light Emitting Diode)

} EMISSIONE SPONTANEA

LASER (Light Amplification by stimulated emission of radiation) } EMISSIONE STIMOLATA

Rivelatori:

fotodiodi
fotomoltiplicatori
occhio umano

Abbiamo visto che per λ nello spettro visibile la frequenza di oscillazione del campo elettrico

$$\nu \approx 10^{14} \div 10^{15}\ \mathrm{Hz} \rightarrow T \sim 1\ \mathrm{fs}$$

Tutti i rivelatori sono sensibili all'intensità media del campo elettro-magnetico

par (10.4)
Mazzoldi

INTENSITÀ MEDIA

Calcoliamo l'intensità media trasportata dal campo e-m nell'unità di tempo attraverso l'unità di superficie.

- densità di energia del campo elettrico nel vuoto $u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$

- densità di energia del campo magnetico nel vuoto $u_B = \frac{1}{2} \mu_0 H^2$

quindi la densità di energia del campo e-m

$$u_{EM} = u_E + u_B = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2$$

Inoltre, poiché:

$$H = B/\mu_0 \qquad u_M = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

$$B = E/c \longrightarrow u_M = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \frac{E^2}{c^2}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \rightarrow u_M = \frac{1}{2} \frac{1}{\cancel{\mu_0}} \cancel{\mu_0} \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

quindi $\boxed{u_E = u_M}$

$$u_{EM} = u_E + u_M = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

$$\boxed{u_{EM} = \varepsilon_0 E^2}$$

Consideriamo il caso di un'onda e-m piana

$$E = E_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$u_{EM} = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

la densità di energia media $\bar{u}_{EM}$ la si ottiene mediando nel tempo

$$\bar{u}_{EM} = \frac{1}{T}\int_0^T u_{EM}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

e poiché $\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(kx - \omega t)\, dt = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\bar{u}_{EM} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2}$$

$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(kx - \omega t)\, dt$ per risolverlo sostituiamo poniamo

$x = 0 \longrightarrow$

$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)\, dt$ e sostituiamo

$$\varphi = \omega t, \quad d\varphi = \omega\, dt$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)\,dt \longrightarrow \frac{1}{\omega T}\int_0^{\omega T} \cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi$$

poiché $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - (1-\cos^2\varphi)$$

$$= 2\cos^2\varphi - 1$$

e quindi $\cos^2\varphi = \dfrac{1+\cos 2\varphi}{2}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} 1\, d\varphi + \underbrace{\cancel{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\cos 2\varphi\, d\varphi}}_{=0} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\cdot 2\pi = \frac{1}{2}$$

si ottiene quindi il risultato:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(kx-\omega t)\,dt = \frac{1}{2}$$

l'intensità media la si ottiene moltiplicando la densità media per la velocità con cui il campo e-m si propaga:

$$\boxed{\bar{I} = c\,\bar{u}_{EM} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2}$$

$$\boxed{\bar{I} = \frac{1}{2} c\,\varepsilon_0 |E|^2}$$

d'ora in poi ometteremo il segno di media temporale sottintendendolo

Onde elettromagnetiche sferiche

Una sorgente di onde elettromagnetiche puntiforme armonica emette campo E isotropicamente con ampiezza

$$E = \frac{E_0}{r} \cos(kr - \omega t)$$

dove r è la distanza dalla sorgente

le superfici equifase, o FRONTI D'ONDA, sono delle sfere $(kr - \omega t) =$ costante

Anche per le onde sferiche valgono le proprietà che abbiamo dimostrato per le onde piane:

- $\bar{E}$, $\bar{B}$ sono trasversi
- $\bar{E} \perp \bar{B}$
- $I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 |E|^2 = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \frac{E_0^2}{r^2}$

Sovrapposizione di onde luminose :

interferenza

Supponiamo adesso di voler calcolare l'intensità in un punto in cui si sovrappongono 2 onde luminose alla stessa frequenza e la stessa polarizzazione :

$$E_1 = E_{01} \cos(\omega t + \phi_1)$$

$$E_2 = E_{02} \cos(\omega t + \phi_2)$$

Per prima cosa dovremo calcolare il campo elettrico risultante

$$E = E_1 + E_2 = E_{01} \cos(\omega t + \phi_1) + E_{02} \cos(\omega t + \phi_2)$$

questo calcolo è semplice solo se $E_{01} = E_{02}$, nel qual caso si possono usare le formule di prostaferesi, altrimenti si può ricorrere al metodo dei numeri complessi.

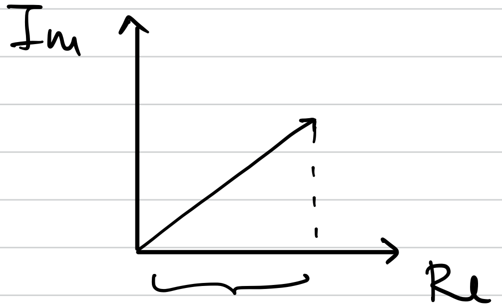
metodo dei numeri complessi

$$E_0 \cos(\omega t + \phi) = Re\left[E_0 e^{i(\omega t + \phi)}\right]$$

si utilizza la rappresentazione complessa e alla fine del calcolo si estrae la parte reale (analogamente a quanto viene fatto per le correnti alternate con i fasori)

a volte il calcolo può essere semplificato utilizzando la rappresentazione vettoriale nel piano complesso

metodo grafico con vettori nel piano complesso



$E_0 \cos(\omega t + \phi)$

$$E_0 e^{i(\omega t + \phi)} = E_0 \cos(\omega t + \phi) + i E_0 \sin(\omega t + \phi)$$

Calcoliamo quindi il campo risultante sarà dato dalla parte Reale di

$$E_{01} e^{i(\omega t+\phi_1)} + E_{02} e^{i(\omega t+\phi_2)}$$

per ottenere l'intensità media

$$I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 |E|^2 = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E \cdot E^*$$

complesso coniugato *

$$I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \left[E_{01} e^{i(\omega t+\phi_1)} + E_{02} e^{i(\omega t+\phi_2)} \right] \cdot \left[E_{01} e^{-i(\omega t+\phi_1)} + E_{02} e^{-i(\omega t+\phi_2)} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \left[E_{01}^2 + E_{01} E_{02} e^{i(\phi_1-\phi_2)} + E_{02} E_{01} e^{i(\phi_2-\phi_1)} + E_{02}^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \left[E_{01}^2 + E_{02}^2 + E_{01} E_{02} \left(e^{i(\phi_1-\phi_2)} + e^{-i(\phi_1-\phi_2)} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \left[E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2 E_{01} E_{02} \cos(\phi_1-\phi_2) \right]$$

---

dato un numero complesso $(a+ib)$ il suo complesso coniugato è $(a-ib)$

$$I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \left[E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2 E_{01} E_{02} \cos(\phi_1 - \phi_2) \right]$$

ma poiché

$$I_1 = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_{01}^2$$

$$I_2 = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_{02}^2$$

si trova:

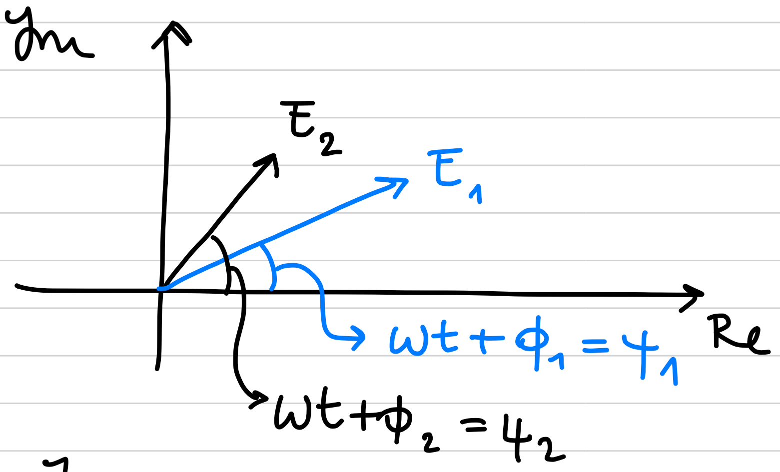
$$\boxed{I = I_1 + I_2 + \underbrace{2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\phi_1 - \phi_2)}_{\text{termine di interferenza}}}$$

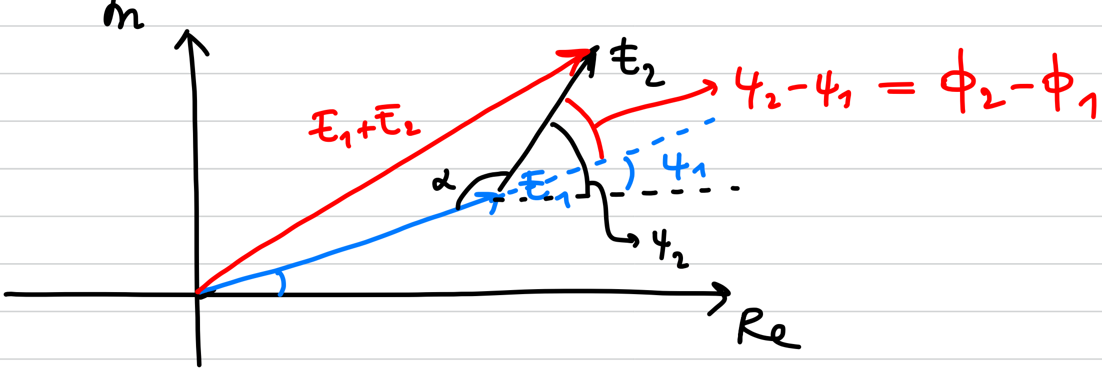
l'intensità risultante dalla sovrapposizione di due onde luminose non è la semplice somma delle intensità delle due onde, ma si aggiunge un termine il cui segno dipende dalla differenza $(\phi_1 - \phi_2)$ fra le fasi delle due onde.

$$\cos(\phi_1 - \phi_2) < 0 \implies I < I_1 + I_2$$ interferenza distruttiva

$$\cos(\phi_1 - \phi_2) > 0 \implies I > I_1 + I_2$$ interferenza costruttiva

Otteniamo lo stesso risultato con il metodo grafico della somma di due vettori nel piano complesso associati a E_1 e E_2





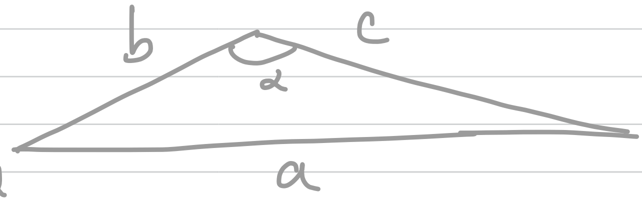
$$|E_1+E_2|^2 = |E_1|^2 + |E_2|^2 - 2|E_1||E_2|\cdot\cos\alpha \quad *$$

$$\alpha + (\phi_2-\phi_1) = \pi \qquad \alpha = \pi - (\phi_2-\phi_1)$$

$$\cos\alpha = \cos(\pi + (\phi_1-\phi_2)) =$$

$$\cos\pi\cdot\cos(\phi_1-\phi_2) - \sin\pi\,\sin(\phi_1-\phi_2) = -\cos(\phi_1-\phi_2)$$

Dato un triangolo



$*$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Si ottiene quindi:

$$|E_1+E_2|^2 = |E_1|^2 + |E_2|^2 + 2\,|E_1|\,|E_2| \cos(\phi_2-\phi_1)$$

e quindi per l'intensità

$$I = \frac{1}{2} c\,\varepsilon_0 |E_1+E_2|^2 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\phi_2-\phi_1)$$

che è lo stesso risultato già ottenuto.

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cos(\phi_2-\phi_1)$$

se le 2 sorgenti hanno la stessa ampiezza,

$$E_{01} = E_{02} \qquad |E_1| = |E_2| \qquad I_1 = I_2 = I_0$$

$$I = 2I_0 \left(1+\cos(\phi_2-\phi_1)\right)$$

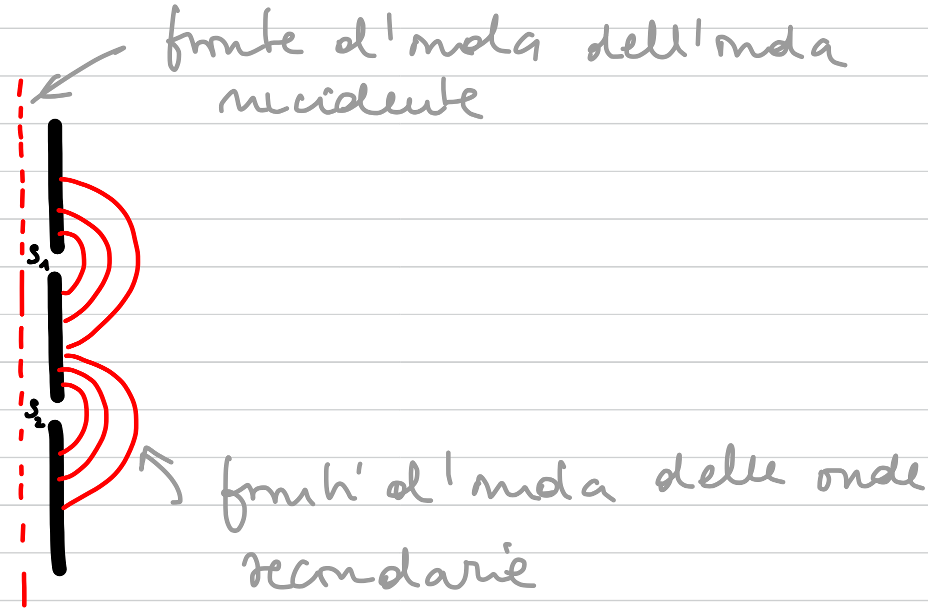
in questo caso avremo:

$$I_{max} = 4I_0$$

$$I_{min} = 0$$

Si noti che per osservare una figura di interferenza costante nel tempo $(\phi_1-\phi_2)$ deve essere costante. In questo caso si dice che le sorgenti sono COERENTI

Consideriamo adesso di avere un'onda piana che illumina uno schermo con 2 fenditure

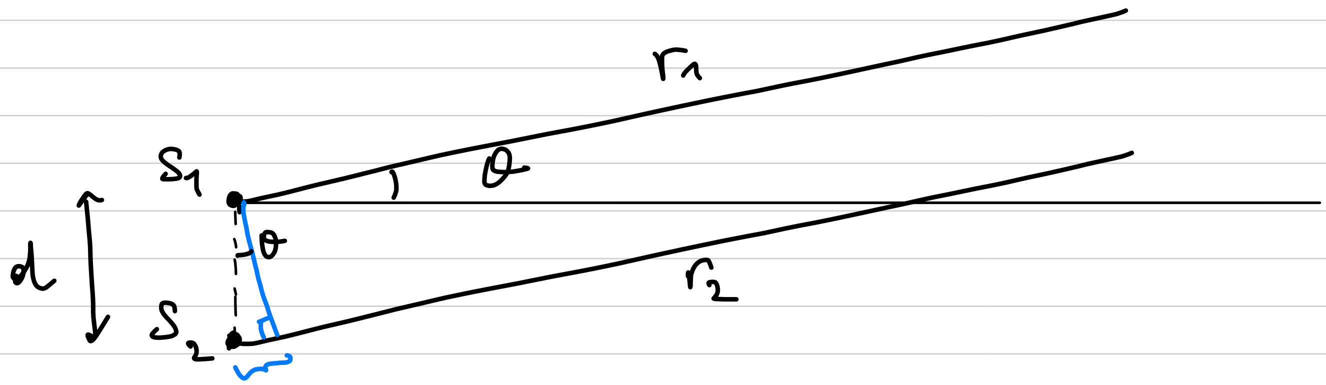


dal momento che il teorema di Huygens-Fresnel (paragrafo 11.2 Mazzoldi) ci dice che ogni punto del fronte d'onda si comporta come una sorgente secondaria di onde sferiche, le 2 fenditure sullo schermo si comportano come sorgenti di onde sferiche

$$E = \frac{E_0}{r} \cos\left(kr - \omega t\right)$$

In questo modo abbiamo realizzato 2 sorgenti monocromatiche che possono interferire

Calcoliamo quindi l'intensita' media a grande distanza nella direzione individuata dall'angolo θ



$$E_1 = E_{01} \cos(\omega t + \phi_1) \longrightarrow \frac{E_0}{r_1} \cos(kr_1 - \omega t)$$

$$E_2 = E_{02} \cos(\omega t + \phi_2) \longrightarrow \frac{E_0}{r_2} \cos(kr_2 - \omega t)$$

per r grande $\frac{E_0}{r_1} \simeq \frac{E_0}{r_2} \simeq E_0'$

e quindi l'intensita' media risultante

$$I = 2I_0 \left(1 + \cos\left(kr_2 - kr_1\right)\right)$$

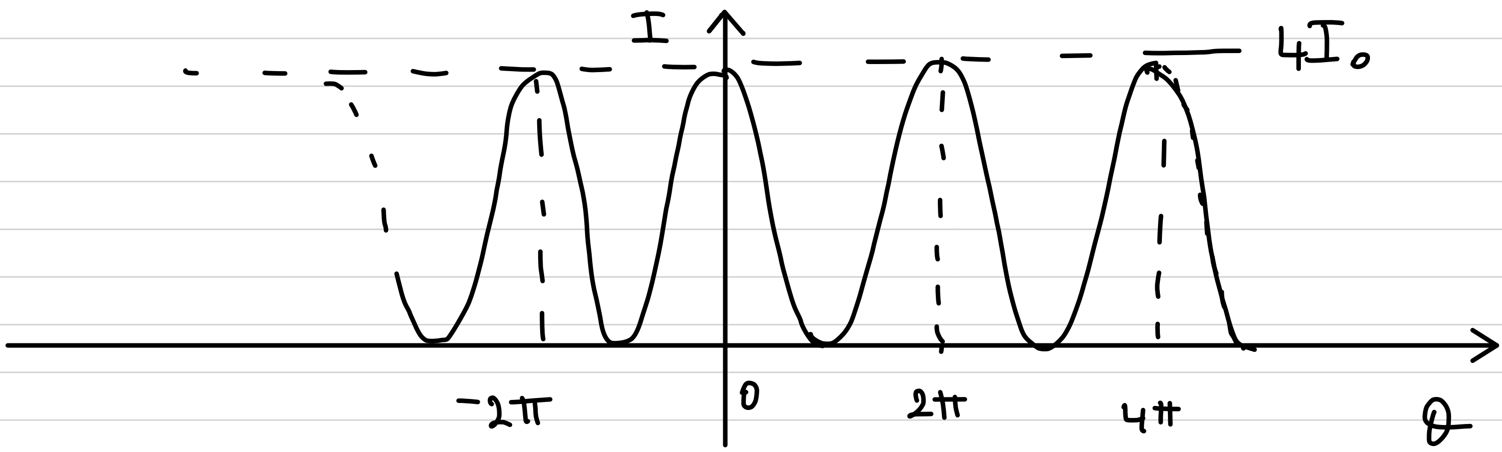
$$= 2I_0 \left(1 + \cos k\left(r_2 - r_1\right)\right)$$

ma dalla figura, chiamata d la distanza fra le 2 fenditure, si trova:

$$(r_2 - r_1) = d \sin\theta$$

e quindi

$$I = 2I_0\,(1+\cos kd\sin\theta)$$



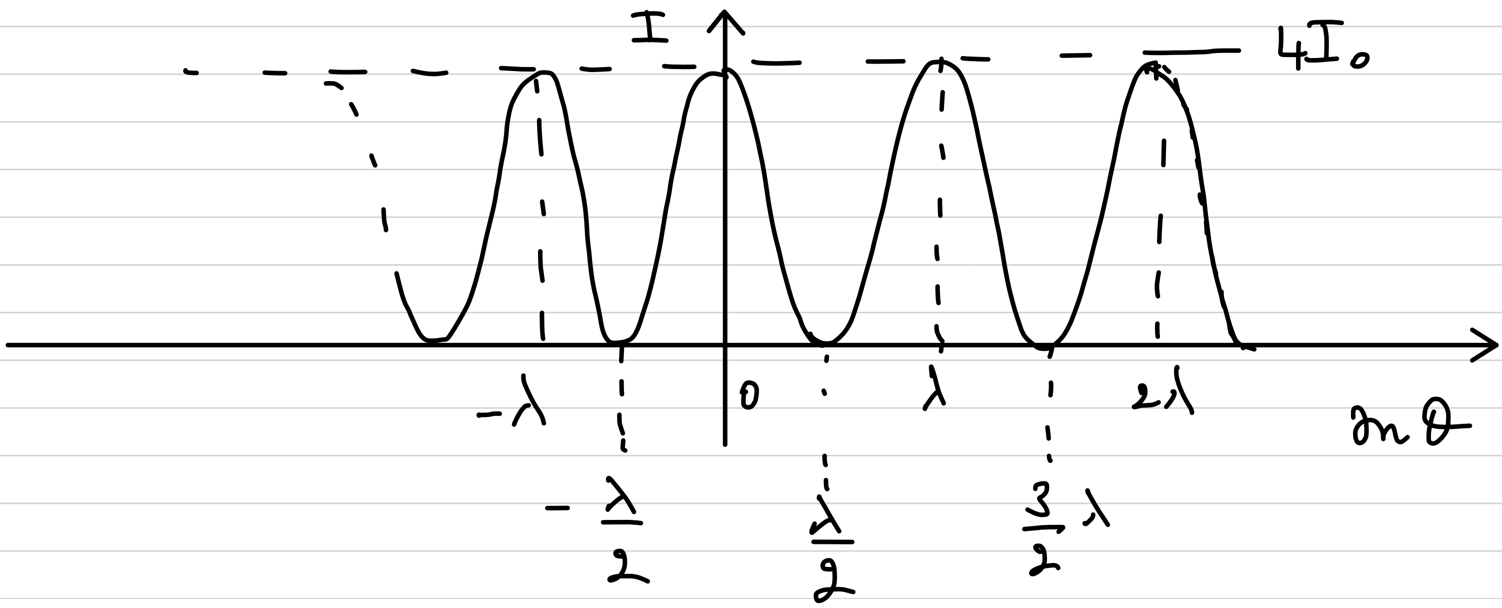
Si ottengono delle FRANGE DI INTERFERENZA

l'intensità è massima per

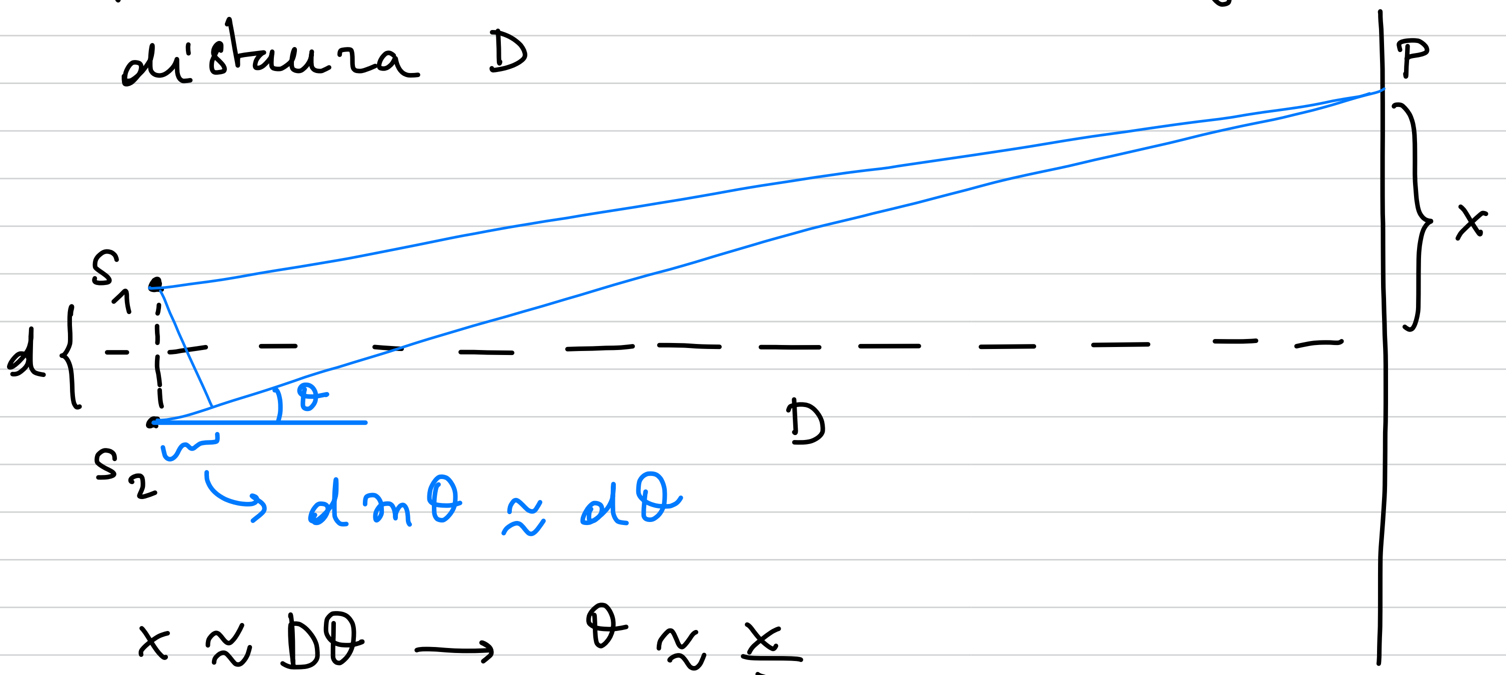
$$kd\sin\theta = 2\pi m \quad\rightarrow\quad \boxed{d\sin\theta = m\lambda}$$

ed è minima per

$$kd\sin\theta = (2m+1)\pi \qquad \boxed{d\sin\theta = (2m+1)\lambda/2}$$



Facciamo un esempio: mettiamo uno schermo per osservare l'interferenza a grande distanza D

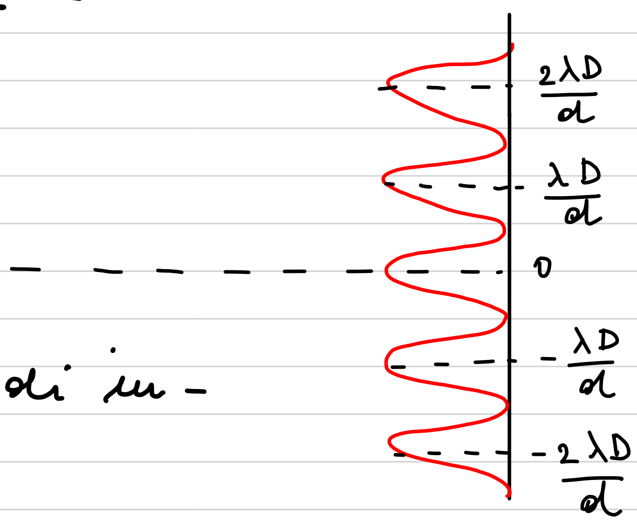


$$x \approx D\theta \longrightarrow \theta \approx \frac{x}{D}$$

Per quanto detto prima avremo massimi di intensità (interferenza costruttiva) nei punti dello schermo individuati dalle coordinate x =

$$d\theta = m\lambda \longrightarrow \frac{d\,x}{D} = m\lambda$$

$$x = \frac{m\lambda D}{d}$$



la distanza fra le frange di interferenza è

$$\Delta x = \frac{\lambda D}{d}$$

per avere $\Delta x = 5\,mm$ con $\lambda = 500\,nm$ e $D = 1\,m$

$$\Delta x = \frac{500\ 10^{-9}}{5\ 10^{-3}} = 10^{-4}\,m = 100\,\mu m$$