Esercizi di cinematica (Mencuccini)

Franco Bagnoli

October 2, 2019

Problema 2.2* Un corpo viene lanciato al tempo $t = 0$ in direzione orizzontale con una velocità di modulo $v_0 = 20$ m/s, da un punto ad una quota $h = 50$ m. Calcolare

1. Le coordinate $A = (x^*, y^*)$ del punto materiale al tempo $t^* = 2$;
2. Il raggio di curvatura R della traiettoria al tempo $t = 0$.

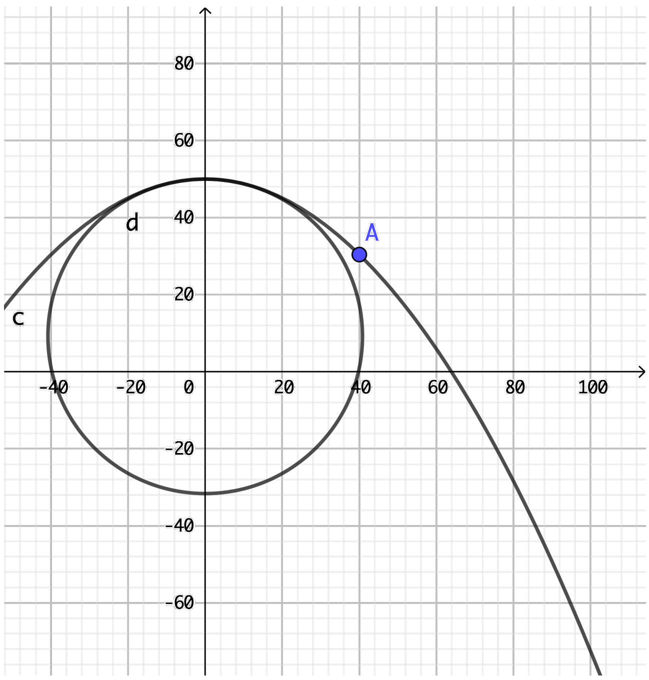

Figure 1:

Soluzione La legge del moto del corpo è

$$\begin{cases} x &= v_0 t \\ y &= h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

per cui al tempo $t^* = 2$ s abbiamo

$$\begin{cases} x^* &= v_0 t^* = 40.00 \text{ m} \\ y^* &= h - \frac{1}{2} g (t^*)^2 = 30.40 \text{ m}. \end{cases}$$

Il raggio di curvatura è legato alla velocità v e all'accelerazione centripeta a_c da

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

ovvero

$$R = \frac{v^2}{a_c}$$

la velocità è

$$\boldsymbol{v} = \begin{cases} x^* &= v_0 \\ y^* &= h - gt \end{cases}$$

Al tempo $t = 0$ abbiamo $v = v_0$ e dato che in tale istante la velocità è orizzontale, tutta l'accelerazione è perpendicolare e quindi centripeta

$$a_c = g.$$

Quindi

$$R = \frac{v^2}{g} \simeq 40.82 \text{ m}.$$

che torna abbastanza con la figura.

Problema 2.2 Un corpo viene lanciato al tempo $t_0 = 0$ dall'origine con una velocità di modulo $v_0 = 5.10$ m/s e con una inclinazione θ rispetto all'orizzontale, tale che $\tan(\theta) = 5$. Calcolare il valore R del raggio di curvatura della traiettoria nel punto di lancio, che è uguale a quello nel punto Q di atterraggio. I due cerchi osculatori hanno lo stesso centro?

Soluzione Il calcolo si basa sempre sulla formula

$$R = \frac{v^2}{a_c},$$

il problema è trovare l'accelerazione centripeta. Si può procedere per via geometrica o analitica.

Intanto scriviamoci le equazioni del moto

$$\begin{cases} x &= v_0 \cos(\theta) t \\ y &= v_0 \sin(\theta) t - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

La velocità è

$$\begin{cases} \dot{x} &= v_0 \cos(\theta) \\ \dot{y} &= v_0 \sin(\theta) - gt, \end{cases}$$

e il suo modulo vale $v(t) = \sqrt{v_0^2 - 2 v_0 g \sin(\theta) t + g^2 t^2}$ e al tempo $t_0 = 0$ è v_0.

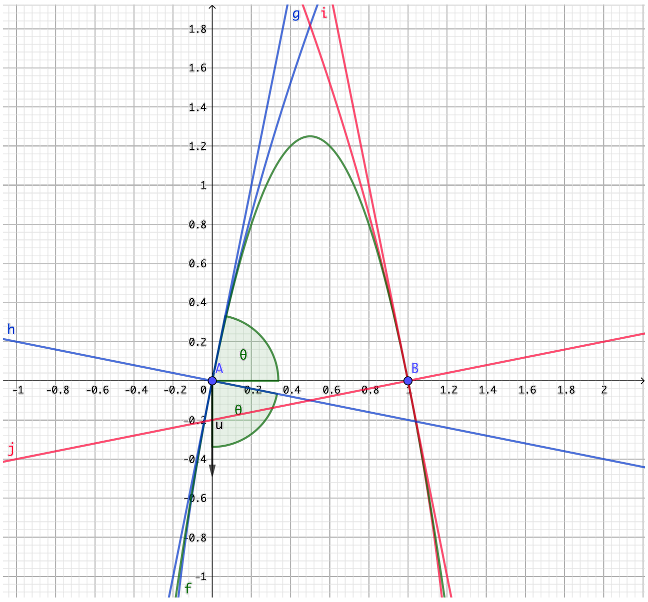

Figure 2:

Per calcolare l'accelerazione centripeta si può calcolare l'accelerazione totale $a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$, l'accelerazione tangenziale $a_t = dv/dt$ e poi sfruttare il fatto che $\boldsymbol{a}_c$ e $\boldsymbol{a}_t$ sono perpendicolari, da cui

$$a_c = \sqrt{a^2 - a_t^2}$$

che è sicuramente la strada più lunga ma forse più sicura.

L'accelerazione è

$$\begin{cases} \ddot{x} & = 0 \\ \ddot{y} & = g, \end{cases}$$

da cui $a = g$. L'accelerazione tangenziale è

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{-v_0 g \sin(\theta) + g^2 t}{\sqrt{v_0^2 - 2v_0 g \sin(\theta) t + g^2 t^2}}$$

e al tempo $t = 0$

$$a_t = g \sin(\theta).$$

quindi

$$a_c = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{g^2 - g^2 \sin^2(\theta)} = g \cos(\theta).$$

Quindi il raggio di curvatura è

$$R = \frac{v_0^2}{g \cos(\theta)}.$$

Metodo geometrico: si sa che l'accelerazione è sempre g e diretta verso il basso, e che la tangente nel punto O è inclinata di θ rispetto all'orizzontale,

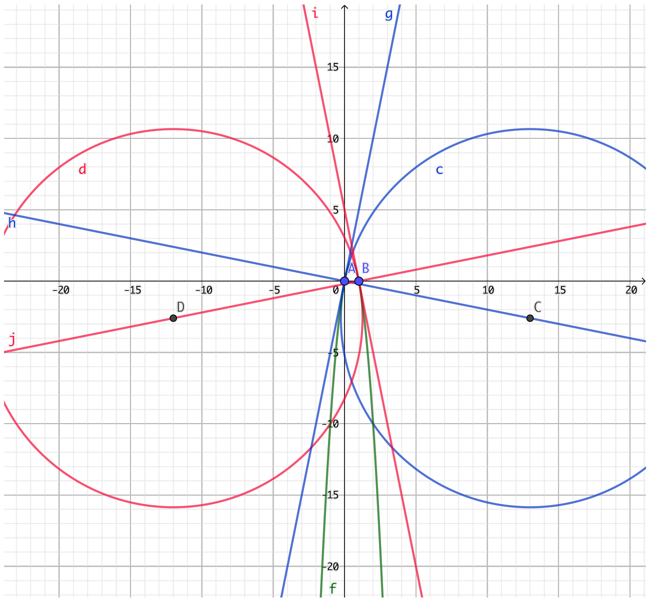

Figure 3:

quindi la proiezione di g nella direzione perpendicolare alla tangente è $a_c = g\cos(\theta)$.

Altro metodo: l'accelerazione centripeta si ottiene come prodotto vettoriale tra il versore della velocità e l'accelerazione. Dato che $\hat{\boldsymbol{v}} = \cos(\theta)\hat{\boldsymbol{i}} + \sin(\theta)\hat{\boldsymbol{j}}$, abbiamo

$$a_c = \hat{\boldsymbol{v}} \times \boldsymbol{a} = g\cos(\theta).$$

Sostituendo i dati, considerando che

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}} \simeq 0.20$$

si ottiene

$$a_c \simeq 1.92 \text{ m/s}^2$$

e

$$R \simeq 13.53 \text{ m}.$$

Il punto Q è $(1,0)$.

Dato che $R\sin(\theta) \simeq 13.27$ m (distanza orizzontale del centro del cerchio osculatore da O) è molto maggiore della distanza tra O e Q, i due cerchi soni ben distinti.